山西新晋科教文化中心　策划

# 矩阵的研究

MATRICES RESEARCH

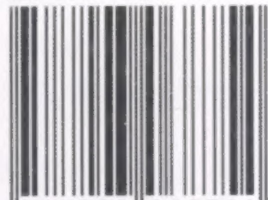
张红玉　魏慧敏　编著



山西出版集团
山西人民出版社

# 矩阵的研究

MATRICES RESEARCH



ISBN 978-7-203-06875-4

定价：26.00元

山西新晋科教文化中心 策划

# 矩阵的研究

MATRICES RESEARCH

张红玉 魏慧敏 编著



山西出版集团
山西人民出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

矩阵的研究/张红玉，魏慧敏主编. —太原：山西人民出版社，2010.7
ISBN 978-7-203-06875-4

Ⅰ. ①矩… Ⅱ. ①张…②魏… Ⅲ. ①矩阵—研究
Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 123479 号

**矩阵的研究**

---

**著　　者**：张红玉　魏慧敏
**责任编辑**：贾　娟
**装帧设计**：陶雅娜

---

**出 版 者**：山西出版集团·山西人民出版社
**地　　址**：太原市建设南路 21 号
**邮　　编**：030012
**发行营销**：0351-4922220　4955996　4956039
0351-4922127（传真）　4956038（邮购）
**E-mail**：sxskcb@163.com　发行部
sxskcb@126.com　总编室
**网　　址**：www.sxskcb.com

---

**经 销 者**：山西出版集团·山西人民出版社
**承 印 者**：山西辰昱印务有限公司

---

**开　　本**：787mm×1092mm　1/16
**印　　张**：9
**字　　数**：200 千字
**印　　数**：1—1000 册
**版　　次**：2010 年 7 月　第 1 版
**印　　次**：2010 年 7 月　第 1 次印刷
**书　　号**：ISBN　978-7-203-06875-4
**定　　价**：26.00 元

---

# 前言 Forwords

本书通过矩阵与行列式、线性方程组、二次型、线性变换及多项式之间的联系总结了矩阵的地位及作用。并且通过典型例题给出了应用矩阵解题的方法,同时也包含了作者多年的教学成果。

全书共分七章,第一章矩阵、第二章行列式与矩阵、第三章线性方程组与矩阵由魏慧敏执笔,第四章二次型与矩阵由魏慧敏、张红玉执笔,第五章线性空间与矩阵、第六章线性变换与矩阵、第七章多项式与矩阵由张红玉执笔。各章详细地介绍了有关矩阵的重要定理结论,然后通过相关典型例题的详细解析给出矩阵在其中的应用。

本书可以作为数学、应用数学、物理、计算机及其他工科类各专业的参考书,特别可作为硕士研究生的参考书,也可作为高校教师的参考资料。希望此书能帮助读者培养学习矩阵代数的兴趣,能引导启发读者掌握解决问题的思路和方法。

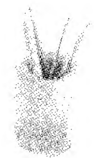
在编写过程中,作者参考了国内外的许多名家之作,在此表以致谢。由于编者学识浅薄,书中难免有缺点不足之处,敬请专家、同行和读者批评指正。

编者

2009 年 11 月

# 目　录

CONTENTS



# 第一章 矩 阵

## §1 矩 阵

### 一、矩阵的运算

1. 相等:设 $A=(a_{ij})_{mn}$,$(b_{ij})_{lk}$,如果 $m=l,n=k$,且 $a_{ij}=b_{ij}$,对 $i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$ 都成立,我们就说 $A=B$.

2. 加法:设 $A=(a_{ij})_{sn}$,$B=(b_{ij})_{sn}$是两个同型矩阵(即都是 $s\times n$ 矩阵),则矩阵 $C=(c_{ij})_{sn}=(a_{ij}+b_{ij})_{sn}$称为 $A$ 和 $B$ 的和,记为 $C=A+B$. 元素全为零的矩阵称为零矩阵,记为 $O_{sn}$,可简单地记为 $O$. 对所有的 $A$,有$A+O=A$.

$$A+(-A)=O$$

$$A-B=A+(-B)$$

3. 乘法:设

$$A=(a_{ik})_{sn},B=(b_{kj})_{nm},$$

那么矩阵

$$C=AB=(c_{ij})_{sm}$$

称为矩阵 $A$ 与 $B$ 的乘积,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

即矩阵 $A$ 与 $B$ 的乘积 $C$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素 $c_{ij}$等于第一个矩阵 $A$ 的第 $i$ 行与第二个矩阵 $B$ 的第 $j$ 列的对应元素的乘积的和. 当然,在乘积的定义中,我们要求第二个矩阵的行数与第一个矩阵的列数相等.

**例 1** 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$,

那么 $AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5-&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6&7\\10&2&-6\\-2&17&10\end{pmatrix}$

矩阵的乘法适合结合律:$(AB)C=A(BC)$.

但是矩阵的乘法不适合交换律、消去律,即一般说来

$$AB\neq BA.$$

当 $AB=AC$ 时,不一定有 $B=C$.

例如,设

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}.$$

注:两个不为零的矩阵的乘积可以是零.

矩阵的乘法和加法还适合分配律,即

$$A(B+C)=AB+AC,$$
$$(B+C)A=BA+BC.$$

我们还可以定义矩阵的方幂. 设 $A$ 是一 $n\times n$ 矩阵,定义

$$\begin{cases}A^0=E\\A^1=A\\A^{k+1}=A^kA\end{cases}$$

换句话说,$A^k$ 就是 $k$ 个 $A$ 连乘.. 由乘法的结合律,易得

$$A^kA^l=A^{k+l},$$
$$(A^k)^l=A^{kl}.$$

这里 $k,l$ 是任意正整数. 因矩阵乘法不适合交换律,故 $(AB)^k$ 与 $A^kB^k$ 一般不相等.

1) $A=(a_{ij})_{n\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$

$\varepsilon_i$ 表示 $n$ 维单位列向量,则 $A\varepsilon_j=\alpha_j,\varepsilon_i^TA=\beta_i$

2) $(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_{n-1})\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_2\\\beta_3\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}0\\\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\varepsilon_{n-1}\end{pmatrix}(0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1})$$

3) $E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{ij},j=k\text{ 时}\\0\ ,j\neq k\text{ 时}\end{cases}$

4) $\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & \cdots & k_1 a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n a_{n1} & \cdots & k_n a_{nn} \end{pmatrix}$

$\rightarrow A \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & \cdots & k_1 a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n a_{n1} & \cdots & k_n a_{nn} \end{pmatrix}$

4. 数量乘法:矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$ 与数 $k$ 的数量乘积,记为 $kA$. 换句话说,用数 $k$ 乘矩阵就是把矩阵的每个元素都乘上 $k$.

5. 矩阵的转置:把一矩阵 $A$ 的行列互换,所得到的矩阵称为 $A$ 的转置,记为 $A'$.

$(A')'=A$,

$(A+B)'=A'+B'$,

$(AB)'=B'A'$,

$(kA)'=kA'$.

6. 子式:在一个 $s\times n$ 矩阵 $A$ 中任意选定 $k$ 行和 $k$ 列,位于这些选定的行和列的交点上的 $k^2$ 个元素按原来的次序所组成的 $k$ 级行列式,称为 $A$ 的一个 $k$ 级子式. 其中 $k\leqslant \min(s,n)$.

**二、特殊矩阵**

1. 单位矩阵: 对角线元素都为 1,其余元素为 0 的 $n$ 阶方阵
2. 对角矩阵: 对角线之外的元素都为 0 的 $n$ 阶方阵
3. 三角矩阵: 对角线以上(或以下)元素全为 0 的 $n$ 阶方阵
4. 对称矩阵: 满足 $A'=A$ 的 $n$ 阶方阵 $A$.
5. 反对称矩阵: 满足 $A'=-A$ 的 $n$ 阶方阵 $A$
6. 幂等矩阵: 满足 $A^2=A$ 的 $n$ 阶方阵 $A$
7. 幂零矩阵: 满足 $A^k=O$ 的 $n$ 阶方阵 $A$
8. 对合矩阵: 满足 $A^2=E$ 的 $n$ 阶方阵 $A$
9. 正交矩阵: 满足 $A'=A^{-1}$的 $n$ 阶方阵 $A$
10. 循环矩阵:形如 $A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$的 $n$ 阶方阵.
11. 埃尔米特矩阵:满足$\overline{A}^T=A$ 的 $n$ 阶方阵 $A$
12. 右伪逆矩阵: 设 $A$ 是 $m\times n$ 阶矩阵,规定:$A^{RM}=A'(AA')^{-1}$为右伪逆矩阵. 即 $AA^{RM}=AA'$

$(A'A)^{-1}=E$

13. 左伪逆矩阵：设 $A$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，规定：$A^{LM}=(A'A)^{-1}A'$ 为左伪逆矩阵. 即 $A^{LM}A=(A'A)^{-1}A'A=E$

14. 若尔当(*Jordan*)块：形如

$$J(\lambda,t)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}_{t\times t}$$

的矩阵，其中 $\lambda$ 是复数.

15. 若尔当形矩阵：由若干个若尔当块组成的准对角矩阵. 其一般形状如

$$\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}$$

**三、矩阵的秩**

1. 矩阵的秩的表述：

1)矩阵的行秩与列秩统称为矩阵的秩.

2)矩阵的不为零的子式的最大阶数称为矩阵的秩.

3)矩阵的秩是 $r$，若矩阵中有一个 $r$ 级子式不为零，同时所有 $r+1$ 级子式全为零.

注 (1)矩阵 $A$ 的秩 $\geqslant r$ 的充要条件为有一个 $r$ 级子式不为零

(2)矩阵的秩 $\leqslant r$ 的充要条件为的所有 $r+1$ 级子式全为零.

(3)在秩为 $r$ 的矩阵中，不为零的 $r$ 级子式所在的行正是它行向量组的一个极大线性无关组，所在的列正是它列向量的一个极大线性无关组.

计算矩阵秩的方法：对矩阵作行的初等变换，把矩阵化成阶梯形，这个阶梯形矩阵中非零的行的个数就是原来矩阵的秩.

**定理 1** 设 $A,B$ 是数域 $P$ 上 $n\times m$ 矩阵，则

$r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$

$r(A\pm B)\geqslant r(A)-r(B)$

**定理 2** 设 $A$ 是数域 $P$ 上 $n\times m$ 矩阵，$B$ 是数域 $P$ 上 $m\times s$ 矩阵，于是

$秩(AB)\leqslant \min[秩(A),秩(B)]$，

**推论 1** 如果 $A=A_1A_2\cdots A_t$，那么

$秩(A)\leqslant \min\limits_{1\leqslant j\leqslant t}(秩 A_j)$.

**推论 2** 设 $A$ 是数域 $P$ 上 $n\times m$ 矩阵，$B$ 是数域 $P$ 上 $n$ 阶可逆矩阵，$C$ 是数域 $P$ 上 $n$ 阶可逆矩阵，则

$r(BAC)=r(BA)=r(AC)=r(A)$

**定理 3** $r(AB)=r(B)$ 的充要条件为 $BX=0$ 与 $ABX=0$ 同解；$r(AB)=r(A)$ 的充要条件为 $A^TX=0$ 与 $B^TA^TX=0$ 同解.

**定理 4** 设 $A_{s\times n}B_{n\times m}=C_{s\times m}$，则 $r(A)+r(B)-n\leqslant r(C)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$

**推论 3** 若 $A_{s\times n}B_{n\times m}=0$,则 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

**定理 5** 设 $D=\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$,则 $r(A)+r(B)\leqslant r(D)$

**定理 6** 设 $M=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$,则 $r(A)+r(B)=r(M)$

3. 初等矩阵:由单位矩阵 $E$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵都是可逆的,它们的逆矩阵还是初等矩阵. 即

$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$, $P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1}))$, $P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$

4. 矩阵等价:$A$ 与 $B$ 如果可以经过一系列初等变换互得,就称 $A$ 与 $B$ 等价.

等价具有反身性、对称性与传递性.

**定理 7** 若 $A$ 是 $n$ 级矩阵($n\geqslant 2$),则

$$秩(A^*)=\begin{cases}n, 若秩(A)=n;\\ 1, 若秩(A)=n-1;\\ 0, 若秩(A)<n-1.\end{cases}$$

**四、矩阵的逆**

1. 逆矩阵:对于 $n$ 级方阵 $A$,如果有 $n$ 级方阵 $B$,使得 $AB=E$($E$ 是 $n$ 级单位矩阵),则称 $A$ 可逆,$B$ 就称为 $A$ 的逆矩阵,记为 $A^{-1}$.

2. 伴随矩阵:设 $A_{ij}$是矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

中元素 $a_{ij}$的代数余子式,矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $A$ 的伴随矩阵.

$$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix}d & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d\end{pmatrix}=dE, 其中\ d=|A|$$

**定理 7** 矩阵 $A$ 可逆的充要条件是 $A$ 非退化的,而且

$$A^{-1}=\frac{1}{d}A^*\ (d=|A|\neq 0)$$

注 如果$|A|=d\neq 0$,那么

$|A^{-1}|=d^{-1}$

例:已知 $A^2-2A+3E=0$,求证 $A$ 可逆,并求 $A^{-1}$.

解:由 $A^2-2A+3E=0$ 得$\frac{1}{3}(A^2-2A)=E$,

即 $\frac{1}{3}(A-2E)A=E$,

从而 $A$ 可逆,且 $A^{-1}=\frac{1}{3}(A-2E)$.

**定理 8** 如果矩阵 $A,B$ 可逆,那么 $A'$ 与 $AB$ 也可逆,且

$(A')^{-1}=(A^{-1})'$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

**定理 9** 矩阵 $A,B$ 等价的充要条件是有初等矩阵 $P_1,\cdots,P_l,Q_1,\cdots,Q_t$ 使

$A=P_1P_2\cdots P_lBQ_1Q_2\cdots Q_t$.

**定理 10** $n$ 级矩阵 $A$ 为可逆的充要条件是它能表成一些初等矩阵的乘积:

$A=Q_1Q_2\cdots Q_m$.

**推论 4** 两个 $s\times n$ 矩阵 $A,B$ 等价的充要条件为,存在可逆的 $s$ 级矩阵 $P$ 与可逆的 $n$ 级矩阵 $Q$ 使

$A=PAQ$.

**推论 5** 可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化成单位矩阵. 即

设 $A$ 是一 $n$ 级可逆矩阵,有一系列初等矩阵 $P_1,\cdots,P_m$ 使

$$P_m\cdots P_1A=E, \tag{1}$$

由(4)即得

$$P_m\cdots P_1E=A^{-1}. \tag{2}$$

(1),(2)两个式子说明,如果用一系列初等行变换把可逆矩阵 $A$ 化成单位矩阵,那么同样地用这一系列初等行变换去化单位矩阵,就得到 $A^{-1}$.

把 $A,E$ 这两个 $n\times n$ 矩阵凑在一起,作成一个 $n\times 2n$ 矩阵 $(A\quad E)$,则

$$(A\quad E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\quad A^{-1})$$

同理,可逆矩阵也能用初等列变换化成单位矩阵,这就给出了用初等列变换求逆矩阵的方法.

**五、分块矩阵**

乘法:设 $A=(a_{ik})_{sn},B=(b_{kj})_{nm}$,把 $A,B$ 分成一些小矩阵

$$A=\begin{matrix} & n_1 & n_2 & \cdots & n_l \\ s_1 & A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ s_2 & A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_t & A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl}\end{matrix},\quad B=\begin{matrix} & m_1 & m_2 & \cdots & m_r \\ n_1 & B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ n_2 & B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_l & B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lr}\end{matrix},$$

其中每个 $A_{ij}$ 是 $s_i\times n_j$ 小矩阵,每个 $B_{ij}$ 是 $n_i\times m_j$ 小矩阵,于是有

$$C=AB=\begin{matrix} & m_1 & m_2 & \cdots & m_r \\ s_1 & C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ s_2 & C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_t & C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr}\end{matrix},$$

其中

$$C_{pq}=A_{p1}B_{1q}+A_{p2}B_{2q}+\cdots+A_{pl}B_{lq}=\sum_{k=1}^{l}A_{pk}B_{kq}(p=1,2,\cdots,t;q=1,2,\cdots,r).$$

注:在分块(1),(2)中矩阵 $A$ 的列分法必须与矩阵 $B$ 的行的分法一致.

分块矩阵在矩阵乘法中的应用:

对于 $n$ 阶方阵 $A$ 可以写成$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$或$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$(任意矩阵类似)

$B_1,B_2,\cdots,B_m$ 表示 $B$ 的行向量,于是 $B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ \vdots\\ B_m\end{pmatrix}$,

按分块相乘,就有

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1m}B_m\\ a_{21}B_1+a_{22}B_2+\cdots+a_{2m}B_m\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}B_1+a_{n2}B_2+\cdots+a_{nm}B_m\end{pmatrix}.$$

可以看出 $AB$ 的行向量是 $B$ 的行向量的线性组合;将 $AB$ 进行另一种分块乘法,从结果中可以看出 $AB$ 的列向量是 $A$ 的列向量的线性组合.

**例** 求矩阵

$$D=\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1k}0\cdots 0\\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\\ a_{k1}\cdots a_{kk}0\cdots 0\\ c_{11}\cdots c_{1k}b_{11}\cdots b_{1r}\\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\\ c_{r1}\cdots c_{rk}b_{r1}\cdots b_{rr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}$$

的逆矩阵,其中 $A,B$ 分别是 $k$ 级和 $r$ 级的可逆矩阵,$C$ 是 $r\times k$ 矩阵,$O$ 是 $k\times r$ 零矩阵.

**解**:因为

$$|D|=|A||B|,$$

所以当 $A,B$ 可逆时,$D$ 也可逆.设

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_k & O\\ O & E_r\end{pmatrix},$$

这里 $E_k,E_r$ 分别表示 $k$ 级和 $r$ 级单位矩阵.乘出来并比较等式两边,得

$$\begin{cases} AX_{11} = E_k, \\ AX_{12} = O, \\ CX_{11} + BX_{21} = O, \\ CX_{12} + BX_{22} = E_r. \end{cases}$$

由第一、二式得

$X_{11} = A^{-1}, X_{12} = A^{-1}O = O,$

代入第四式，得

$X_{22} = B^{-1},$

代入第三式，得

$BX_{21} = -CX_{11} = -CA^{-1}, X_{21} = -B^{-1}CA^{-1}.$

因此

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

特别地，当 $C = O$ 时，有

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

形如：$\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_2 \end{pmatrix}$的分块矩阵，其中 $A_i$ 是 $n_i \times n_i$ 矩阵 $(i = 1, 2, \cdots, l)$，通常称为准对角矩阵. 准对角矩阵包括对角矩阵作为特殊情形.

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & & & O \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_l \end{pmatrix},$$

如果它们相应的分块是同级的，那么有

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & O \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_lB_l \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & & & O \\ & A_2 + B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l + B_l \end{pmatrix}$$

它们还是准对角矩阵.

其次，如果 $A_1, A_2, \cdots, A_l$ 都是可逆矩阵，那么

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l^{-1} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的初等变换称为广义初等变换：

(1)两行(列)对换；

(2)一行(列)左乘(右乘)一个矩阵 $P$；

(3)一行(列)加上另一行(列)的 $P$ (矩阵)倍数.

单位分块矩阵：$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$实施广义初等变换后得到如下类型的矩阵：

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}.$$

这五类分块方阵称为广义初等矩阵. 和初等矩阵与初等变换的关系一样，用这些矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

只要分块乘法能够进行，其结果就是对它进行相应的变换：

$$\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix}. \tag{5}$$

同样，用它们右乘任一矩阵，进行分块乘法时也有相应的结果.

在(5)中，适当选择 $P$，可使 $C+PA=O$. 例如 $A$ 可逆时，选 $P=-CA^{-1}$，则 $C+PA=O$. 于是(5)的右端成为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

这种形状的矩阵在求行列式、逆矩阵和解决其它问题时是比较方便的，因此(5)中的运算非常有用.

## §2 λ－矩 阵

1. $\lambda$－矩阵：一个矩阵的元素是 $\lambda$ 的多项式，即 $P[\lambda]$的元素，就称为 $\lambda$－矩阵. 用 $A(\lambda)$，$B(\lambda)$，…等表示.

注(1)数域 $P$ 中的数为元素的矩阵称为数字矩阵，它是特殊的 $\lambda$－矩阵.

(2)$\lambda$－矩阵的加法与乘法，它们与数字矩阵的运算有相同的运算规律.

(3)$\lambda$-矩阵的行列式是$\lambda$的一个多项式,它与数字矩阵的行列式有相同的性质. 例:矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积.

2. $\lambda$-矩阵的秩:如果$\lambda$-矩阵$A(\lambda)$中有一个$r(r\geq 1)$级子式不为零,而所有$r+1$级子式(如果有的话)全为零,则称$A(\lambda)$的秩为$r$. 零矩阵的秩规定为零.

3. $\lambda$-矩阵的逆:如果有一个$n\times n$的$\lambda$-矩阵$B(\lambda)$使

$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E$,

这里$E$是$n$级单位矩阵. 矩阵$B(\lambda)$(它是唯一的)称为$A(\lambda)$的逆矩阵,记为$A^{-1}(\lambda)$.

4. $\lambda$-矩阵的初等变换:

(1)矩阵的两行(列)互换位置;

(2)矩阵的某一行(列)乘以非零的常数$c$;

(3)矩阵有某一行(列)加另一行(列)的$\varphi(\lambda)$倍,$\varphi(\lambda)$是一个多项式.

5. $\lambda$-矩阵的等价:如果可以经过一系列初等变换将$A(\lambda)$化为$B(\lambda)$,$A(\lambda)$称为与$B(\lambda)$等价

等价是$\lambda$-矩阵之间的一种关系,(!)反身性 (2) 对称性 (3) 传递性

6. 行列式因子:设$\lambda$-矩阵$A(\lambda)$的秩为$r$,对于正整数$k$,$1\leq k\leq r$,,$A(\lambda)$中必有非零的$k$级子式. $A(\lambda)$中全部$k$级子式的首项系数为1的最大公因式$D_k(\lambda)$称为$A(\lambda)$的$k$级行列式因子.

7. 不变因子:标准形的主对角线上非零元素$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$称为$\lambda$-矩阵$A(\lambda)$的不变因子.

8. 初等因子:把矩阵$A$(或线性变换$A$)的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,所有这些一次因式方幂(相同的必须按出现的次数计算)称为矩阵$A$(或线性变换$A$)的初等因子.

**定理1** 一个$n\times n$的$\lambda$-矩阵$A(\lambda)$是可逆的充要条件为行列式$|A(\lambda)|$是一个非零的数.

**定理2** 矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的充要条件为有一系列初等矩阵

$P_1,P_2,\cdots,P_l,Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$,使

$A(\lambda)=P_1P_2\cdots P_lB(\lambda)Q_1Q_2\cdots Q_t$.

**定理3** 任意一个非零的$s\times n$的$\lambda$-矩阵$A(\lambda)$都等价于下列形式的矩阵,即任意一个$\lambda$-矩阵可以经过初等变换化为某种对角矩阵.

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (\bigstar)$$

其中$r\geq 1$,$d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$是首项系数为1的多项式,且

$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,r-1)$.

矩阵($\bigstar$)称为$A(\lambda)$的标准形,且唯一.

**例** 用初等变换化$\lambda$-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & -\lambda^2\end{pmatrix}$$

为标准形.

$$A(\lambda)\to\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\lambda-1 & 1\\ \lambda & \lambda^2 & 0\\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 1 & \lambda^3+\lambda-1 & 1+\lambda^2\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^3-\lambda & \lambda+\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^3-\lambda & \lambda+\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}=B(\lambda)$$

**定理 4** 等价的 $\lambda$ - 矩阵具有相同的秩.

注 在 $\lambda$ - 矩阵的行列式因子之间,有关系式

$D_k(\lambda)\mid D_{k+1}(\lambda)\ (k=1,2,\cdots,r-1)$.

**定理 5** 矩阵 $A(\lambda)$ 是可逆的充要条件是它可以表成一些初等矩阵的乘积.

**推论** 两个 $s\times n$ 的 $\lambda$ - 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件为,有一个 $s\times s$ 可逆矩阵与一个 $n\times n$ 可逆矩阵 $Q(\lambda)$,使

$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$.

**定理 6** 如果有 $n\times n$ 数字矩阵 $P_0,Q_0$ 使

$\lambda E-A=P_0(\lambda E-B)Q_0$,

则 $A$ 和 $B$ 相似.

**定理 7** 两个 $\lambda$—矩阵等价⇔行列式因子相同⇔不变因子相同⇔初等因子相同.

**定理 8** $A,B$ 是数域 $P$ 上的两个 $n$ 阶方阵,$A$ 与 $B$ 相似⇔特征矩阵 $\lambda E-A$ 和 $\lambda E-B$ 等价⇔$A$ 与 $B$ 具有相同的初等因子⇔$A$ 与 $B$ 具有相同的行列式因⇔

$A$ 与 $B$ 具有相同的不变因子.

**定理 9** 复数矩阵 $A$ 与对角矩阵相似 $A$ 的初等因子都是一次的⇔$A$ 的不变因子没有重根⇔$A$ 的最小多项式没有重根.

**定理 10** 设 $A$ 是复数域上 $n$ 维线性空间 $V$ 的线性变换,在 $V$ 中必定存在一组基,使 $A$ 在这组基下的矩阵是若尔当形,并且这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被 $A$ 唯一决定的.

**定理 11** 每个 $n$ 级的复数矩阵 $A$ 都与一个若尔当形矩阵相似,这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被矩阵 $A$ 唯一决定的,它称为 $A$ 的若尔当标准形.

**定理 12** 数域 $P$ 上 $n\times n$ 方阵 $A$ 在上相似于唯一的一个有理标准形,称为 $A$ 的有理标准形.

注:(1)$n\times n$ 矩阵的特征矩阵的秩一定是 $n$.

(2)$r(A(\lambda)) = r$, $A(\lambda)$行列式因子一共有 $r$ 个,而且 $A(\lambda)$行列式因子在初等变换下是不变的.

(3)$n\times n$ 矩阵的不变因子总是有 $n$ 个,它们的乘积就等于这个矩阵的特征多项式.

(4)不变因子是矩阵的相似不变量(它们与该矩阵的选取无关),因此把一个线性变换的任一矩阵的不变因子定义为此线性变换的不变因子.

(5)矩阵 $A$ 的最小多项式就是 $A$ 的最后一个不变因子.

(6)若尔当形矩阵除去其中若尔当块排列的次序外被它的初等因子唯一决定,若尔当形矩阵包括对角矩阵作为特殊情形,那就是由一级若尔当块构成的若尔当形矩阵.

初等因子与不变因子的求法:

1)用初等变换化特征矩阵 $\lambda E-A$ 为对角形式,然后将主对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是 $A$ 的全部初等因子.

2)设一个 $n$ 级矩阵的全部初等因子为已知,在全部初等因子中将同一个一次因式$(\lambda-\lambda_j)$ $(j=1,2,\cdots,r)$的方幂的那些初等因子按降幂排列,而且当这些初等因子的个数不足 $n$ 时,就在后面补上适当个数的 1,使得凑成 $n$ 个. 设所得排列为

$(\lambda-\lambda_j)^{k_{nj}},(\lambda-\lambda_j)^{k_{n-1,j}},\cdots,(\lambda-\lambda_j)^{k_{1j}},(j=1,2,\cdots,r).$

于是令

$d_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{i2}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{ir}}(i=1,2,\cdots,n),$

则 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$就是 $A$ 的不变因子.

**例** 设 12 级矩阵的不变因子是

$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9个},(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1),(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2.$

按定义,它的初等因子有 7 个,即

$(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda+1),(\lambda+1),(\lambda-i)^2,(\lambda+i)^2.$

其中$(\lambda-1)^2$ 出现三次,$\lambda+1$ 出现二次.

矩阵的三大关系

| | 等价 | 相似 | 合同 |
|---|---|---|---|
| 对象 | $m\times n$ 矩阵 | $n$ 阶方阵 | $n$ 阶实对称矩阵 |
| 来源 | $A$ 可经初等行变换得到 $B$ | 一个线性变换在不同基下的矩阵 | 二次型经非退化线性变换后，新旧矩阵之间的关系 |
| 刻划 | 存在 $P$, $Q$ 可逆，使得 $B=PAQ$ | 存在 $P$ 可逆，使得 $B=P^{-1}AP$ | 存在 $P$ 可逆，使得 $B=P^{T}AP$ |
| 共同点 | 都满足反身性、对称性和传递性，都保持矩阵的秩不变 | | |
| 最简形式 | $\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{m\times n}$ | 有 $n$ 个线性无关的特征向量时相似于对角形矩阵 | $\begin{bmatrix}E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0\end{bmatrix}$ |
| 性质 | 秩相同 | 有相同的特征多项式，有相同的特征值 | 有相同的秩与正惯性指数 |
| 等价类个数 | $r+1$, $r=min(m, n)$ | 无限多个 | $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ |

# 自测题

**一、填空题**(每小题 3 分，共 15 分).

1. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. 则 $|A|=$________.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, 则 $(A+2I)^{-1}(A^2-4I)=$________.

3. 设 $f(x)=x^2+3x+2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. 则 $f(A)=$________.

4. 任意的 $n$ 阶矩阵都能相似于________.

5. $A(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}$, 则它的不变因子是________________.

6. $A(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 0 & \lambda(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$, 则它的各阶行列式因子是________________.

**二、判断说明题**(每小题5分,共20分)

1. $A,B,C$ 为 $n$ 阶方阵,若 $AB=AC$,则 $B=C$.

2. $n$ 阶矩阵 $A$ 可逆,则 $A*$ 也可逆.

3. 设 $A,B$ 为 $n$ 阶可逆矩阵,则 $(AB)*=B*A*$.

4. 数域 $P$ 上的 $n$ 阶方阵 $A$ 的特征矩阵的秩为 $n$.

5. 两个 $n$ 阶矩阵相似,则它们具有相同的不变因子.

6. $n$ 阶方阵 $A$ 的特征多项式与最小多项式有相同的一次因式.

**三、计算题**(每小题15分,共45分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$,求 $|A^8|$ 及 $A^4$.

2. 设4阶矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$,且矩阵 $A$ 满足关系式

$A(I-C^{-1}B)'C'=I$,$I$ 为单位矩阵. 试将上式化简并求出矩阵 $A$.

3. 解矩阵方程 $AX+B=X$.

其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$.

4. 求 $A$ 的特征多项式的不变因子,其中

5. 求 $A(\lambda)$ 的标准形,其中

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}-2&0&0\\\lambda^2+7\lambda-1&\lambda+1&\lambda-1\\3\lambda^2-3&\lambda-1&\lambda+1\end{bmatrix}$$

**四、证明题**(每小题10分,共20分)

1. 如果 $A^2=A$,称 $A$ 为幂等矩阵. 设 $A,B$ 为 $n$ 阶幂等矩阵,证明:$A+B$ 是幂等矩阵的充要条件是 $AB=BA=0$.

2. 设 $A$ 是数域 $P$ 上一个 $n\times n$ 矩阵,证明 $A$ 与 $A^T$ 有相同的各阶行列式因子,证明 $A$ 与 $A^T$ 相似.

## 典型例题解析

1. 计算 $A^n$ 的方法:

①用归纳法

**例** 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$,求 $A^k$.

**解**:由 $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix}$, $\cdots$ ,得

$$A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}$$

然后用数归法证明.

②通过与对角矩阵相似

**例** 设 $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$,$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $AP=P\Lambda$, 求 $A^n$.

**解**:$|P|=2$,$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$

由 $AP=P\Lambda$,知 $A=P\Lambda P^{-1}$

从而

$$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2^{n+1}\\1&2^{n+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-2^{n+1}&2^{n+1}-2\\4-2^{n+1}&2^{n+2}-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}$$

③设 $n$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}$,计算计算 $A^n$

**解**:$A=(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1})$

$A^2=A(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1})=(0,A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_{n-1})$

$=(0,0,\cdots,0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-k})$

一般的 $A^k=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k个},\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-k})$

$A^n=(0,0,\cdots0)=0$

④计算 $C^n=\begin{pmatrix}3&-1\\-9&3\end{pmatrix}^n$

**解**:因 $C=\begin{pmatrix}3&-1\\-9&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}(3\quad -1)$

于是有

$$C^n=\left[\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}(3\quad -1)\right]^n=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}(3\quad -1)\right]^{n-1}(3\quad -1)=6^{n-1}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}(3\quad -1)=$$
$$6^{n-1}\begin{pmatrix}3&-1\\-9&3\end{pmatrix}$$

设 $\alpha=(1,2,3)'$,$\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})'$,求$(\alpha\beta')^{10}$

**解**:$(\alpha\beta')^{10}=(\alpha\beta')(\alpha\beta')\cdots(\alpha\beta')=\alpha(\beta'\alpha)\cdots(\beta'\alpha)\beta'=\alpha\,(\beta'\alpha)^9\beta'$

$$\beta'\alpha=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$$

$$\alpha\beta'=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta')^{10}=3^9\alpha\beta'=3^9\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$$

设 $A$ 是 $n$ 阶非退化反对称矩阵，$b$ 为 $n$ 维向量，求证：秩$\begin{pmatrix}A&b\\-b'&0\end{pmatrix}=n$.

证明：令 $B=\begin{pmatrix}A&b\\-b'&0\end{pmatrix}$

因 $B'=\begin{pmatrix}A&b\\-b'&0\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}A'&-b\\b'&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A&-b\\b'&0\end{pmatrix}=-B$

故 $B$ 是反对称矩阵

又因 $A$ 为 $n$ 阶非退化矩阵，所以 $|A|\neq0$，

亦即 $A$ 为偶数阶反对称矩阵

那么 $B$ 就是奇数阶反对称矩阵，从而 $|B|=0$

又因 $A$ 为 $B$ 的一个 $n$ 阶不为零子式，故 $r(B)=0$

2. 设矩阵 $D=\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}$，证明 $r(D)\geqslant r(A)+r(B)$.

证明：设 $r(A)=r_1,r(B)=r_2$，则 $A$ 和 $B$ 中分别有 $r_1$ 阶和 $r_2$ 阶子式不为零，不妨设

$$A\begin{bmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_{r1}\\j_1&j_2&\cdots&j_{r1}\end{bmatrix}\neq0,B\begin{bmatrix}i'_1&i'_2&\cdots&i'_{r2}\\j'_1&j'_2&\cdots&j'_{r2}\end{bmatrix}\neq0.$$

从而 $D$ 中有 $r_1+r_2$ 阶子式

$$D\begin{bmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_{r1}&i'_1&i'_2&\cdots&i'_{r2}\\j_1&j_2&\cdots&j_{r1}&j'_1&j'_2&\cdots&j'_{r2}\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_{r1}\\j_1&j_2&\cdots&j_{r1}\end{bmatrix},B\begin{bmatrix}i'_1&i'_2&\cdots&i'_{r2}\\j'_1&j'_2&\cdots&j_{r2}\end{bmatrix}\neq0,$$

故 $r(D)\geqslant r_1+r_2$

3. 设 $A=(a_{ij})_{n\times m},B=(b_{ij})_{n\times m}$，证明：$r(AB)\geqslant r(B)-n$

**证明**：设 $r(A)=r_1,r(B)=r_2$ 则存在可逆矩阵 $P_1,Q_1,P_2,Q_2$ 使

$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix}1_{r1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad P_2AQ_2=\begin{bmatrix}1_{r2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}..$$

从而

$$AB=P_1^{-1}\begin{bmatrix}1_{r1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q_1^{-1}P_2^{-1}\begin{bmatrix}1_{r2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q_2$$

令 $C=Q_1^{-1}P_2^{-1}=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{bmatrix}$，其中 $C_1$ 为 $r_1\times r_2$ 阶矩阵，$r(C)=n$，又 $\begin{bmatrix}1_{r1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q_1^{-1}P_2^{-1}$ $\begin{bmatrix}1_{r2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=D$，其中 $D$ 为 $s\times m$ 阶矩阵，故

$r(AB)=r(D)=r(C_1)$，而

$C_1$ 等于 $C$ 中去掉 $n-r_1$ 行，$n-r_2$ 列后所得的矩阵，又在矩阵中去掉一行(列). 矩阵的秩最多减少 1，所以

$r(AB)=r(C_1)\geqslant n-(n-r_1)-(n-r_2)=r_1+r_2-n$,

即 $r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n$

4. 设 $A,B,C$ 是任意三个矩阵，乘积 $ABC$ 有意义，证明；

$r(ABC)\geqslant r(AB)+r(BC)-r(B)$

**证明**:设 $A$ 是 $s\times n$ 阶矩阵，$B$ 是 $n\times k$ 阶矩阵，$C$ 是 $k\times m$ 阶矩阵，又

设 $r(B)=r$，则存在 $n$ 阶矩阵 $P$ 与 $k$ 阶矩阵 $Q$ 使

$B=P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$. 令 $P=(M,S)$，$Q=\begin{pmatrix}N\\ T\end{pmatrix}$，则

$$B=(M,S)\begin{pmatrix}I_r & o\\ o & o\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N\\ T\end{pmatrix}=MN$$

$r(ABC)=r((AM)(NC))\geqslant r(AM)+r(NC)-r$

$\geqslant r(AMN)+r(MNC)-r$

$=r(AB)+r(BC)-r(B)$

5. 设 $A$ 为 $n$ 阶可逆的反对称矩阵，$b$ 为 $n$ 元列向量，$B=\begin{pmatrix}A & b\\ b' & 0\end{pmatrix}$，证明 $r(B)=n$

**证明**:因 $A$ 可逆，故有

$$\begin{bmatrix}I & 0\\ -b'A^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A & b\\ b' & 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}A & b\\ 0 & -b'Ab\end{bmatrix},$$

因此 $|B|=|A|\cdot(-b'A^{-1}b)$.

又 $\begin{bmatrix}I & 0\\ b'A^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A & -b\\ -b' & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & -b\\ 0 & -b'Ab\end{pmatrix}$,

故 $|B'|=\begin{vmatrix}A' & b\\ b' & 0\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}A & -b\\ -b' & 0\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}|A|(-b'A^{-1}b)$

而 $|B|=|B'|$，所以

$(-b'A^{-1}b)=(-1)^{n+1}(-b'A^{-1}b)$.

因 $A$ 为 $n$ 阶可逆的反对称矩阵，所以 $n$ 必为偶数.

从而有 $-b'A^{-1}b=0$，即

$|B|=0$,故 $r(B)=r(A)=n$

6. 设 $A$ 是 $n$ 阶反对称矩阵,$b$ 为 $n$ 元列向量,$r(A)=r(A,b)$,求证 $r(B)=r(A)$:,其中 $B=\begin{pmatrix} A & b \\ -b' & 0 \end{pmatrix}$.

**证明:**由 $r(A)=r(A,b)$,我们有

$r(A)=r\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} -A \\ b' \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A \\ -b' \end{pmatrix}$

设 $AX=b$ 有解 $X_0$,即

$AX_0=b, X'_0A'=b'$,即 $-X'_0A=b'$,

于是 $-X'_0AX_0=-X'_0b=b'X_0$

又 $X'_0B=b'X_0$,

从而有 $2b'X_0=0$,,

即 $b'X_0=0$,

于是 $\begin{pmatrix} A \\ -b' \end{pmatrix}X_0=\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$,即 $\begin{pmatrix} A \\ -b' \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$有解,

即 $r(B)=r\begin{pmatrix} A & b \\ -b' & 0 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A \\ -b' \end{pmatrix}=r(A)$

7. 证明对称矩阵的秩等于这个矩阵非零主子式的最高阶数.

**证明:**设 $A=(a_{ij})n\times n$,且非零主子式的最高阶数为 $r$

$(i)$ 当 $r=0$ 时,有 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0$,且 $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}=a_{ii}a\,jj-a_{ij}^2=0, i<j$ ,于是 $a_{ij}=0, i,j=1,2,\cdots,n$,. 这样 $A=0, r(A)=0$

$(ii)$ 当 $r=n-1$ 时有 $A$ 的 $n-1$ 阶主式不为零,而 $A$ 的 $n$ 阶主式 $|A|=0$,因此 $r(A)=n-1$

$(iii)$ 当 $0<r\leqslant n-2$ 时,不妨设 $A$ 的左上角的 $r$ 阶主子式不为零,即 $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}\neq 0$,

要证 $r(A)=r$,

只需证 $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$

的所有加边子式都为零即可.

令 $M_{ij}=A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & j \\ 1 & 2 & \cdots & r & j \end{pmatrix}$,

当 $i=j$ 时, $M_{ij}=0$.

当 $i\neq j$ 时,令 $D=A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & i & j \\ 1 & 2 & \cdots & r & i & j \end{pmatrix}$,

由题设 $D=0$,

令 $D=|C|$,假定 $M_{ij}\neq 0$,则 $r(C)=r+1$

且 $C$ 的第 $1,2,\cdots,r,i$ 行是线性无关的,

由 $C$ 的对称性, $C$ 的第 $1,2,\cdots,r,i$ 列也是线性无关的.

由前题处在这些行和列交叉处的子式 $M_{ij}\neq 0$,这与假设矛盾.

8. 设 $A,B,C,D$ 都是 $n$ 阶方阵,$A$ 可逆且 $AC=CA$,则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

**证明:**由分块矩阵乘法易知

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边取行列式,即得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$$

$$= |AD - ACA^{-1}B| = |AD - AA^{-1}CB| = |AD - CB|$$

9. 设 $A,B$ 分别是 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵,证明:

$\lambda \neq 0$, $|\lambda E - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E - BA|$.

**证明:**由 $\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ 0 & \lambda E_n - AB \end{pmatrix}$,得

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & 0 \\ A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ 0 & \lambda E_n - AB \end{vmatrix}$$

$$= |\lambda E_m||\lambda E_n - AB| = \lambda^m|\lambda E_n - AB|$$

又由 $\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m - BA & B \\ 0 & \lambda E_n \end{pmatrix}$,得

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & 0 \\ -A & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_m - BA & B \\ 0 & \lambda E_n \end{vmatrix}$$

$$= |\lambda E_m - BA||\lambda E_n| = \lambda^n|\lambda E_m - BA|$$

于是 $\lambda^m|\lambda E_n - AB| = \lambda^n|\lambda E_m - BA|$

故 $|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|$.

10. 设 $A^2 = A$,证明:$r(A) = T_r(A)$

**证明:**由上题知存在可逆矩阵 $R$ 是 $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,其中 $B_1$ 是 $r$ 阶方阵,$(B_1, B_2)$ 是 $r \times n$ 满秩阵. 因 $A^2 = A$ 有

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R^{-1}AR = (R^{-1}AR)^2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & B_1B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $(B_1, B_2) = (B_1^2, B_1, B_2) = B_1(B_1, B_2)$,

即 $(B_1, I_r)(B_1, B_2) = 0$ 因 $(B_1, B_2)$ 是行满秩阵,故有 $B_1 = I_r$,从而 $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} I_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,令 $P = R\begin{pmatrix} I_r & -B_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$,则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & -B_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}^{-1} R^{-1}AR\begin{pmatrix} I_r & -B_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} I_r & B_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & -B_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

显然 $r(B)=r\left(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=T_r(B)$.

而 $r(A)=r(B)=T_r(B)=T_r(P^{-1}AP)=T_r(PP^{-1}A)=T_r(A)$

11. 设 $A$ 为二阶方阵,且存在整数 $n>2$,使得 $A^n=0$,证明 $A^2=0$.

证明:$A$ 是二阶方阵,且 $A^n=0$,故 $|A|=0$,则 $r(A)\leqslant 1$

不妨令 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}(a \quad b)$那么

$A^2=\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}\left[(a \quad b)\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}\right](a \quad b)$

令 $c=a+kb$,类似的,有 $A^3=c^2A, A^4=c^3A, \cdots, A^n=c^{n-1}A=0$

如果有 $A=0$,显然有 $A2=0$

如果有 $A\neq 0$,则 $c=0$,从而 $A2=cA=0$

推广:若存在正整数 $K>n$ 使得 $n$ 阶方阵 $A$ 有 $A^k=0$,证明 $A^n=0$(由上题可得)由上题知当 $K>n$ 时, $r(A^k)=r(A^n)=0$ 故 $A^n=0$

12. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵,证明:

(1)若 $A^{k-1}\alpha\neq 0$ 但 $A^k\alpha=0$,则 $\alpha, A\alpha, ,\cdots, A^{k-1}\alpha(k>0)$线性无关

(2)$r(A^{n+1})=r(A^n)$(既当 $m\geqslant n$ 时 $r(A^m)=r(A^n)$)

**证明**:(1)令 $x_0\alpha+x_1(A\alpha)+x_2(A^2\alpha)+\cdots+x_{k-1}(A^{k-1}\alpha)=0$ (一)

用 $A^{k-1}$左乘等式两边,由 $A^k\alpha=0$ 得 $x_0A^{k-1}\alpha=0$

因 $A^{k-1}\alpha\neq 0$ 故 $x_0=0$

从而(一)式变为 $x_1(A\alpha)+x_2(A^2\alpha)+\cdots+x_{k-1}(A^{k-1}\alpha)=0$

用 $A^{k-2}$左乘等式两边,则 $x_1(A^{k-1}\alpha)=0$ ,得 $x_1=0$

类似的可证 $x_0=\cdots=x_{k-1}=0$

所以 $\alpha, A\alpha, ,\cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关

(2)假定 $r(A^{n-1})\neq r(A^n)$,那么有 $r(A^{n-1})<r(A)$(因为乘积的秩不大于因子的秩)

于是 $A^{n+1}x=0$ 的解不完全是 $A^nx$ 的解

(因为 $r(A^{n-1})\neq r((A^n)$ 秩不相同,则对应的齐次线性方程组就不是同解的)

则存在非零的 $n$ 维列向量 $\beta$,使 $A^n\beta\neq 0$,但 $A^{n+1}\beta=0$

由(1)可知 $\beta, A\beta, ,\cdots, A^n\beta$ 线性无关

这与 $n+1$ 个 $n$ 维向量线性相关矛盾

故 $r(A^{n-1})=r(A)$

13. 设 $A$ 是 $r$ 的 $m\times n$ 矩阵,则 $A=HL$,其中 $H$ 是 $m\times r$ 列满秩矩阵,$L$ 是 $r\times n$ 行满秩矩阵(这种分解叫矩阵的满秩分解)

证明:$r(A)=r$,故存在可逆矩阵 $P,Q$ 使 $A=P\begin{bmatrix} Er & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

令 $P=(\overset{r}{H}, \overset{m-r}{H_1})$ ,$Q=\begin{pmatrix} L \\ L_1 \end{pmatrix}_{n-r}^{r}$

则 $A=(H_1, H_1)\begin{pmatrix} Er & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L \\ L_1 \end{pmatrix}=HL$

14. 求证 $m\times n$ 矩阵 $A$ 的秩为 $r$ 的充要条件是 $A$ 有分解式 $A=\alpha_1\beta_1'+\alpha_2\beta_2'+\cdots+\alpha_r\beta_r'$ 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 分别为线性无关的 $m$ 维和 $n$ 维列向量.

$A$ 为方阵,$g(x)$ 是 $A$ 的最小多项式,$f(\lambda)$ 是任一次数大于零的多项式

**证明:**"$\Rightarrow$"

令 $h(\lambda)=(\lambda E-A)$

假设$(f(\lambda),g(\lambda))=d(\lambda)\neq1$ ,则$\partial(d(x))\geqslant1$

因为 $A$ 的最小多项式能整除 $A$ 的特征多项式

故由 $d(x)\mid g(\lambda)$ 得 $d(\lambda)\mid h(\lambda)$ ,又 $d(\lambda)\mid f(\lambda)$

令 $\alpha$ 是 $d(\lambda)$的一个根,则是 $A$ 的特征根且

$f(x)=(\lambda-\alpha)q(\lambda)$

于是 $f(A)=(A-\alpha E)q(A)$

而$|A-\alpha E|=0$,于$|f(A)=0|$与$f(A)$非奇异矛盾

所以 $(f(\lambda),g(\lambda))=1$

"$\Leftarrow$"

若$(f(\lambda),g(\lambda))=1$,那么$\exists u(\lambda),v(\lambda)$使

$u(\lambda)f(\lambda)+v(\lambda)g(\lambda)=1$

用 $A$ 代入,$g(A)=0$,故 $u(A)v(A)=E$

所以$f(A)$非奇.

15. 设 $A\in P^{n\times n}$,证明:

(1)在 $P[x]$中一定有次数小于等于 $n2$ 的非零多项式$f(x)$,使$f(A)=0$

(2)若$f(x),g(x)$是 $P$ 上两个非零多项式,$f(A)=g(A)=0$,则 $d(A)=0$,其中 $d(x)=(f(x),g(x))$

(3)当 $A$ 可逆时在 $P[x]$中一定存在常数项不为零的多项式$f(x)$使$f(A)=0$

**证明:**(1)因为 $dimP^{n\times n}=n2$,故 $E,A,A^2,\cdots,A^{n^2}$定线性相关

于是存在不完全为零的数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n^2}$,使

$a_0E+a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_{n^2}A_{n^2}=0$

令 $f(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n^2}x^{n^2}$

则 $f(A)=0$, 且$\partial f(x))\leqslant n$.

(2)$d(x)=(f(x),g(x))$ ,则$\exists(u(v),v(u))$使

$d(x)=u(x)f(x)+v(x)f(x)$

将 $A$ 代入,$d(A)=u(A)f(A)+v(A)f(A)$

又 $f(A)=g(A)=0$ ,故 $d(A)=0$.

(3)假定 $A$ 的最小多项式 $f(x)$ 常数项为零,令

$f(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x$

$f(A)=A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A=0$

从而 $A(A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A)=0$

又 $A$ 可逆,则 $A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1E=0$

这与$f(x)$是 $A$ 的最小多项式矛盾,故$f(x)$常数项不为零.

16. $A\in P^{n\times n}$,$f(x)\in P[x]$,已知$f(A)$可逆,求证存在 $g(x)\in P[x]$,使$(f(A))^{-1}=g(A)$.

证明:令 $h(x)=|xE-A|$,$h(x)$是 $A$ 的特征多项式

首先证明$(f(x),h(x))=1$

假定$(f(x),h(x))=d(x)\neq 1$,那么

存在$A$的特征值$\lambda_0$,使$x-\lambda_0|h(x),x-\lambda_0|f(x)$

且存在$\xi\in P^n$,且$\xi\neq 0$,使$A\xi=\lambda_0\xi$

令$f(x)=(x-\lambda_0)r(x)$,则$f(A)=(A-\lambda_0E)r(A)$

(或两边取行列式,得$|f(A)|=|A-\lambda_0E||r(A)|=0$)

进一步,

$f(A)\xi=r(A)(A-\lambda_0E)\xi=r(A)(A\xi-\lambda_0\xi)=0=0\cdot\xi$

即0是$f(A)$的特征值,这与$f(A)$可逆矛盾.

于是$(f(x),h(x))=1$

那么$\exists u(x).v(x)\in p(x)$使$u(x)f(u)+v(x)h(v)=1$

则 $u(A)f(A)+v(A)h(A)=E$

由$h(A)=0$得$f(A)u(A)=E$

故$f(A)$可逆,且 $(f(A))^{-1}=u(A)$.

17. 设$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$,求$A(\lambda)$的标准形

解一:$\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{bmatrix}\lambda & 0 & (\lambda+1)^2\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \lambda\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ (\lambda+1)^2 & 0 & 0\end{bmatrix}\to$

$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ (\lambda+1)^2 & 0 & -\lambda(\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$

解二:由$A(\lambda)$是对角矩阵可知其初等因子为

$\lambda,(\lambda+1),\lambda,(\lambda+1)^2$

$(\lambda+1)^2$  $(\lambda+1)$  $1$

$\lambda$  $\lambda$  $1$

↓  ↓  ↓

不变因子为

$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2,d_2(\lambda)=\lambda(\lambda+1),d_1(\lambda)=1$

从而$A(\lambda)$的标准型为$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$

解三:$A(\lambda)$的所有一阶子式为$\lambda,(\lambda+1),\lambda,(\lambda+1)^2$,故

$A(\lambda)$的一阶行列式因子$D_1(\lambda)=1$

$A(\lambda)$的所有二阶子式为$\lambda(\lambda^2+\lambda),\lambda(\lambda+1)^2,(\lambda^2+\lambda)(\lambda+1)^2$

从而 $A(\lambda)$的二阶行列式因子 $D_2(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$

$A(\lambda)$的三阶行列式因子即为 $D_3(\lambda)=\lambda(\lambda^2+\lambda)(\lambda+1)^2$

则 $d_3(\lambda)=\dfrac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=\lambda(\lambda+1)^2, d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda(\lambda+1), d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$

18. 证明:$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{bmatrix}$

的不变因子是$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-1个}, f(\lambda)$,其中$f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$

**证明**:所给的 $\lambda$ - 矩阵有 $n-1$ 阶子式

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}=(-1)^{n-1}$$

所以 $D_{n-1}(\lambda)=1$,于是 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{n-2}(\lambda)=1$

从而 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$

下面计算$|A(\lambda)|$

从第 $n$ 行开始,依次将下一行的倍加到上一行,则

$$|A(\lambda)|=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^2+a_1\lambda+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{bmatrix}=(-1)^{n+1}f(\lambda)(-1)^{n-1}=f(\lambda)$$

则 $D_n(\lambda)=|A(\lambda)|=f(\lambda)$,那么 $d_n(\lambda)=f(\lambda)$

故 $A(\lambda)$的不变因子为$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-1个}, f(\lambda)$.

19. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$的 *Jordam* 的标准型

**解一**:$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$

考虑 $\lambda E-A$ 的两个二阶子式

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+3, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix}=\lambda-1$$

由 $(\lambda^2+2\lambda+3,\lambda-1)=1$ 知 $D_2(\lambda)=1$，

从而 $D_1(\lambda)=1$

$D_3(\lambda)=f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

于是 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda),d_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

则 $A$ 的初等因子是$(\lambda-1),(\lambda+1)^2$

从而 $A\sim J=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1\end{bmatrix}$

解二:$f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2\lambda=-1$

当 $\lambda=-1$ 时,$r(\lambda E-A)=r(-E-A)=2$

因此 $A\sim J=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1\end{bmatrix}$.

解三:

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda+1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & \lambda+1 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -(\lambda+1) & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -(\lambda+1) & 1-\lambda & -(\lambda+1)^2+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -(\lambda+1)^2+2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda+1)^2-1 & 1-\lambda\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda+1)^2-1 & (1-\lambda)[\frac{1}{2}(\lambda+1)^2-1]+(1-\lambda)\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda+1)^2-1 & (1-\lambda)\frac{1}{2}(\lambda+1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda+1)^2-1 & (1-\lambda)(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

20. 设矩阵 $A$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-3)^2$，试写出 $A$ 的所有可能的 *Jordam* 标准型(不计其中 *Jordam* 块的排列次序)

**解**:$f(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-3)^2$ 从而可知 $A$ 为 5 阶矩阵

因为最小多项式与特征多项式有相同的一次因式，

故 $A$ 的最小多项式有以下 6 种可能:

$(\lambda-2)(\lambda-3),(\lambda-2)^2(\lambda-3),(\lambda-2)^3(\lambda-3),(\lambda-2)(\lambda-3)^2,(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2,(\lambda-2)^3(\lambda-3)^2$(1)当 $d_5(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$时,由 $D_5(\lambda)=f(\lambda)$知 $D_4(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

从而 $d_4(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3), d_3(\lambda)=\lambda-2, d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$

(2)当 $d_5(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$时，$D_4(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$ 从而

$d_4(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3), d_3(\lambda)=d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$

(3)当 $d_5(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-3)$时，$D_4(\lambda)=\lambda-3$，则

$d_4(\lambda)=\lambda-3, d_3(\lambda)=d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$

(4)当 $d_5(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)^3, D_4(\lambda)=(\lambda-2)^2$，则

$d_4(\lambda)=\lambda-2, d_3(\lambda)=\lambda-2, d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$ 或

$d_4(\lambda)=(\lambda-2)^2, d_3(\lambda)=d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$

(5)当 $d_5(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2, D_4(\lambda)=\lambda-2$

$d_4(\lambda)=\lambda-2, d_3(\lambda)=d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$

(6)当 $d_5(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^3, D_4(\lambda)=1$ 则

$d_4(\lambda)=d_3(\lambda)=d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$

从而 $A$ 的 *Jordam* 标准型也有以下 6 种可能

$$\begin{bmatrix}2&&&&\\&2&&&\\&&2&&\\&&&3&\\&&&&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&3&\\&&&&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&3&\\&&&&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&&&&\\&2&&&\\&&2&&\\&&&3&1\\&&&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&3&1\\&&&&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&3&1\\&&&&3\end{bmatrix}$$

21. 已知 $g(\lambda)=[\lambda-(1+i)]^2[\lambda-(1-i)]^2(\lambda-1)$ 是 6 阶方阵 $A$ 的极小多项式，且 $TrA=6$

试求：(1) $A$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 及 Jormdam 典范型

(2) $A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 的 Jormdam 典范型

**解**：(1) $g(\lambda)=[\lambda-(1+i)]^2[\lambda-(1-i)]^2(\lambda-1)$

由 $TrA=6$，知 $A$ 特征值之和为 6，

从而 $6-2(1+i)-2(1-i)-1=1$ 是 $A$ 的另一特征值.

于是 $f(\lambda)=(\lambda^2-2\lambda+2)^2(\lambda-1)^2$ 是 $A$ 的特征多项式

是 $A$ 的最小多项式 $=d_6(\lambda)$，

而 $D_6(\lambda)=f(\lambda)$ 则 $D_5(\lambda)=\lambda-1$

从而 $d_4(\lambda)=d_3(\lambda)=d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$

$$故\quad A\sim J=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1+i&1&&\\&&&1+i&&\\&&&&1-i&1\\&&&&&1-i\end{bmatrix}$$

(2)　$|A| = |x| \times (1+i)^2 \times (1-i)^2 = 4, A^* = |A|A^{-1} = A^{-1}$

由 $P^{-1}AP = J$, 得 $P^{-1}A^{-1}P = J^{-1}$

$$\text{从而 } P^{-1}A^*P = 4J^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & & & & & \\ & 4 & & & & \\ & & 2(1-i) & 2i & & \\ & & & 2(1-i) & & \\ & & & & 2(1+i) & -2i \\ & & & & & 2(1-i) \end{bmatrix}$$

即 $A^*$ 的 Jormdam 典范型为

$$\begin{bmatrix} 4 & & & & & \\ & 4 & & & & \\ & & 2(1-i) & 1 & & \\ & & & 2(1-i) & & \\ & & & & 2(1+i) & 1 \\ & & & & & 2(1-i) \end{bmatrix}$$

22. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$ 有一个二重特征值

(1)试求 $A$ 的最小多项式与 Jormdam 标准型

(2)确定 $A$ 相似于对角矩阵的充分必要条件

**解:**(1)$f(x) = |\lambda E - A| = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a)$

由于 $A$ 有一个二重特征值,并且 $TrA = 1 + 4 + 2 = 7$

故分两种情况讨论

①1 是 $A$ 的一个二重特征值,则 $a = 1$,从而 $A$ 的 3 个特征组为 1,1,5 而 $r(E - A) = 1$,那么

$$A \sim J = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$$

最小多项式是$(\lambda - 1)(\lambda - 5)$

②1 是 $A$ 的一个单特征值,则 3 是 $A$ 的二重特征值,从而 $a = -\dfrac{1}{3}$

又　$r(3E - A) = 2$,于是

$$A \sim J = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

最小多项式为$(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$.

(2)由(1)可知 $A$ 相似于对角矩阵的充分必要条件是 $a = 1$

23. 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵,则 $A = B + C$,其中 $B$ 相似于对角形. $C^m = 0$ 且 $C$ 与 $B$ 可换.

证明:任一复方阵都相似于一个若当标准形,设

$$P^{-1}AP=J==\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix},$$

其中 $J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&&\\&\lambda_r&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\lambda_z&1\\&&&&\lambda_t\end{pmatrix},i=1,2,\cdots,s$

令 $D_i=\begin{bmatrix}\lambda_i&&&\\&\lambda_i&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_i\end{bmatrix},E_i=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix},$

则 $J_i=D_i+E_i$,从而 $J=D+E$,,其中

$$D=\begin{pmatrix}D_1&&&\\&D_2&&\\&&\ddots&\\&&&D_s\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}E_1&&&\\&E_2&&\\&&\ddots&\\&&&E_s\end{pmatrix}.$$

取 $m=\max|P_i|$,其中 $P_i$ 是 $J_i$ 的阶数,$i=1,2,\cdots,s$,易验证 $E^m=0$.

令 $B=PDP^{-1},C=PEP^{-1}$,则 $B$ 相似与对角形

$C^m=PE^mP^{-1}=0,A=PJP^{-1}=P(D+E)P^{-1}=PDP^{-1}+PEP^{-1}=B+C.$

又 $DE=\begin{pmatrix}D_1&&&\\&D_2&&\\&&\ddots&\\&&&D_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1&&&\\&E_2&&\\&&\ddots&\\&&&E_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_1E_1&&&\\&D_2E_2&&\\&&\ddots&\\&&&D_sE_s\end{pmatrix}$

$$ED=\begin{pmatrix}E_1D_1&&&\\&E_2D_2&&\\&&\ddots&\\&&&E_sD_s\end{pmatrix},$$

从而 $BC=PDP^{-1}\cdot PEP^{-1}=PDEP^{-1}=PDEP^{-1}=PEP^{-1}\cdot PDP^{-1}=CB.$

24. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 的特征根是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,求证 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 的特征根是 $\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{in}$,其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leqslant n$.

**证明**:设 $A$ 的若当标准形

$$J=P^{-1}AP==\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix},$$

$$\text{其中}\quad J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \lambda_i\end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,s,$$

于是 $J$ 的伴随矩阵 $J^*$ 满足

$$J^*=P^*A^*(P^*)^{-1}=\begin{pmatrix}a_1 & & * \\ & a_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}$$

是上三角形矩阵,这是因为上三角形矩阵的伴随矩阵仍是上三角形矩阵.

因 $A^*$ 与 $J^*$ 相似,故二者有相同的特征根,即 $A^*$ 的特征根为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,但直接计算 $J$ 的 $n-1$ 阶主子式可知 $a_i=\lambda_{i1}\lambda_{i2}\cdots\lambda_{in-1}$.

25. 若存在正整数 $m$ 使 $A^m=I$,证明 $A$ 相似于对角形矩阵.

**证明**:设 $J=PAP^{-1}=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{pmatrix}$

是 $A$ 的若当标准形,于是

$J^m=(PAP^{-1})^m=PA^mP^{-1}=PIP^{-1}=I$,必有

$$J^m=\begin{pmatrix}J_1^m & & & \\ & J_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^m\end{pmatrix}=I.$$

若 $A$ 不相似与对角形,必有某个 $J_k$ 的阶数〉1,设 $J_k$ 是 $P$ 阶矩阵,我们有

$$I_m^k=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & & & \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \lambda_k & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_k\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}\lambda_k^m & C_m^1\lambda_k^{m-1} & \cdots & C_m^{p-1}\lambda_k^{m=p+1} \\ & \lambda_k^m & \cdots & C_m^{p-2}\lambda_k^{m=p+2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_k^m\end{pmatrix}\neq I_p \text{ 矛盾.}$$

# 第二章 行列式与矩阵

## §1 行列式

1. 排列:由 1,2,…,$n$ 组成的一个有序数组称为一个 $n$ 级排列,显然 $12\cdots n$ 也是一个 $n$ 级排列,称为自然排列.

2. 逆序数:在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么它们就称为一个逆序,一个排 7 列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数.

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$

例:$\tau(854362197)=19$

3. 奇偶排列:逆序数为偶数的排列称为偶排列;逆序数为奇数的排列称为奇排列.

4. $n$ 级行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

即为所有取自不同行不同列的 $n$ 个元素的乘积的代数和.

5. 元素的余子式:在 $n$ 阶行列式中划去元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行与第 $j$ 列,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 级行列式称为元素 $a_{ij}$ 的余子式,记作 $M_{ij}$

6. 元素的代数余子式:$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式.

7. 子式:在一个 $n$ 级行列式 $D$ 中任意选定 $k$ 行 $k$ 列 $(k\leqslant n)$,位于这些行和列的交点上的 $k^2$ 个元素按照原来的次序组成一个 $k$ 级行列式 $M$,称为行列式 $D$ 的一个 $k$ 级子式.

8. 子式的余子式:在 $D$ 中划去这 $k$ 行 $k$ 列后余下的元素按照原来的次序组成的 $n-k$ 级行列式 $M'$ 称为 $k$ 级子式 $M$ 的余子式

9. 子式的代数余子式:设 $D$ 的 $k$ 级子式 $M$ 在 $D$ 中所在的行、列指标分别是 $i_1,i_2,\cdots,i_k;j_1,j_2,\cdots,j_k$,则 $M$ 的余子式 $M'$ 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称做 $M$ 的代数余子式.

$$例:D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第一、三行,第二、四列得到一个二级子式 $M$:

$$M=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$M$ 的余子式为

$$M' = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$M$ 的代数余子式为

$$(-1)^{(1+3)+(2+4)}M' = M'.$$

**性质:**

1)行列互换,行列式不变. 即

2)一数乘行列式的一行相当于用这个数乘此行列式. 或者说一行的公因子可以提出去

令 $k=0$,就有如果行列式中一行为零,那么行列式为零.

3)如果某一行是两组数的和,那么这个行列式就等于两个行列式的和,而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式的 对应的行一样.

4)如果行列式中有两行相同,那么行列式为零. 所谓两行相同就是说两行的对应元素都相等.

5)如果行列式中两行成比例,那么行列式为零.

6)把一行的倍数加到另一行,行列式不变.

7)对换行列式中两行的位置,行列式反号.

**定理 1** 设 $d = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$

$A_{ij}$表示元素 $a_{ij}$的代数余子式,则下列公式成立:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} d, 当\ k=i, \\ 0, 当\ k \neq i. \end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j} + a_{2l}A_{2j} + \cdots + a_{nl}A_{nj} = \begin{cases} d, 当\ l=j, \\ 0, 当\ l \neq j. \end{cases}$$

**注** $A_{ij}$中不再含有第 $i$ 行的元素,也就是 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$全与行列式中第 $i$ 行的元素无关.

**定理 2** (克拉默法则)如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式

$$d = |A| \neq 0$$

那么线性方程组(1)有解,并且解是唯一的,解可以通过系数表为

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \cdots, x_n = \frac{d_n}{d},$$

其中 $d_j$ 是把矩阵 $A$ 中第 $j$ 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所成的矩阵的行列式

**定理** 3(拉普拉斯定理) 设在行列式 $D$ 中任意取定了 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 个行. 由这 $k$ 行元素所组成的一切 $k$ 级子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 $D$.

**定理** 4 两个 $n$ 级行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

和

$$D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

的乘积等于一个 $n$ 级行列式

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $c_{ij}$是 $D_1$ 的第 $i$ 行元素分别与 $D_2$ 的第 $j$ 列的对应元素乘积之和:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

行列式计算方法:

1. 定义法
2. 化为三角形行列式的方法
3. 化为范得蒙行列式的方法
4. 拆行(列)法
5. 降级法
6. 加边法
7. 数学归纳法
8. 递推法
9. 因式分解法(如果行列式 $D$ 是某个变数 $x$ 的多项式 $f(x)$,可对行列式施行某些变换,求出 $f(x)$ 的互不相同的一次因式,设这些一次因式的乘积为 $g(x)$,则 $D=f(x)=cg(x)$,再比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的某一项的系数,求出 $c$ 值.)

10 拉普拉斯展开法(用公式 $|D|=M_1A_1+M_2A_2+...+M_tA_t$ 来计算行列式的值)

# §2 行列式与矩阵

**定理5** 设$A,B,C,D$都是$n$阶方阵,其中,$|A|\neq 0$,并且$AC=CA$,则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

**例**:计算$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

**解**:原式$=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$,因$|A|\neq 0$,并且$AC=CA$,

故　原式$=|AD-CB|=\left|\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 5 & 18 \end{vmatrix}=53.$

**定理6** 设$P=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$是分块$n$矩阵,其中,$A,D$分别为$k$阶和$s$阶方阵,

1)若$A$可逆,则$|P|=|A|\,|D-CA^{-1}B|$;

2)若$B$可逆,则$|P|=|D|\,|A-BD^{-1}C|$.

例:计算$2n$阶行列式

$$|P|=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

**解**:令

$$A=D=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix},B=C=\begin{pmatrix} & & & b \\ & & b & \\ & ⋰ & & \\ b & & & \end{pmatrix}$$

则　$D-CA^{-1}B=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}-$

$$\begin{pmatrix} & & & b \\ & & b & \\ & ⋰ & & \\ b & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & & & \\ & a^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & b \\ & & b & \\ & ⋰ & & \\ b & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b^2a^{-1} & & & \\ & a-b^2a^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-b^2a^{-1} \end{pmatrix}$$

从而

$$|P|=|A||D-CA^{-1}B|=a^n\ (a-b^2a^{-1})^n=(a^2-b^2)^n.$$

**定理7**　设$A,B$都是$n$阶方阵,则有$\begin{vmatrix}A & B\\ B & A\end{vmatrix}=|A+B||A-B|$.

由定理7,上例可得:

$$|P|=\begin{vmatrix}A & B\\ B & A\end{vmatrix}=|A+B||A-B|$$

$$=\begin{vmatrix}a & & & b\\ & a & b & \\ & \iddots & \ddots & \\ b & & & a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a & & & -b\\ & a & -b & \\ & \iddots & \ddots & \\ -b & & & a\end{vmatrix}$$

$$=(^a+bn(^a-b)n=(^{a2}-b^2)n$$

**例:**计算:$\begin{vmatrix}0 & x & y & x\\ x & 0 & x & y\\ y & x & 0 & x\\ x & y & x & 0\end{vmatrix}$

**解:**令$A=\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}y & x\\ x & y\end{pmatrix}$,

则　原行列式$=\begin{vmatrix}y & 2x\\ 2x & y\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-y & 0\\ 0 & -y\end{vmatrix}=(y^2-4x^2)y^2$.

**定理8**　设$A,B,C$都是$n$阶方阵,则有$\begin{vmatrix}A & O\\ B & C\end{vmatrix}=|A||C|$或$\begin{vmatrix}A & B\\ O & C\end{vmatrix}=|A||C|$.

**例:**计算:$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$

**解:**原式$=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-5$.

**推论**　设$A,B,C$都是$n$阶方阵,则有$\begin{vmatrix}A & B\\ C & O\end{vmatrix}=(-1)^{n^2}|B||C|$或

$$\begin{vmatrix}O & A\\ B & C\end{vmatrix}=(-1)^{n^2}|B||C|.$$

# 自测题

**一、填空题**(每小题3分,共15分)

1. 填上适当的数字,使72____43____1为奇排列.
2. 四阶行列式$D=|a_{ij}|_{4\times4}$中,含$a_{24}$且带负号的项为________.

3. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = d$. 则 $\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \end{vmatrix} =$________.

4. 行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 的展开式中,$x$ 的系数是________.

5. 设 $M_{ij}$,$A_{ij}$分别是行列式 $D$ 中元素 $a_{ij}$的余子式,代数余子式,则 $M_{i,i+1}+A_{i,i+1}=$________.

**二、判断题**(每小题 3 分,共 15 分)

1. $n$ 阶行列式 $D$ 中有多于 $n^2-n$ 个元素为零,则 $D=0$. (　　)

2. $D=0$,则互换 $D$ 的任意两行或两列,$D$ 的值仍为零. (　　)

3. 排列$\cdots i\cdots j\cdots$与排列$\cdots j\cdots i\cdots$排列的反序数相差 1. (　　)

4. $D=|a_{ij}|_{3\times 3}$,$A_{ij}$为 $a_{ij}$的代数余子式,则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$. (　　)

5. 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+\lambda^2 x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 $A$,若存在三阶矩阵 $B\neq 0$,使得 $AB=0$,则 $\lambda=1$. (　　)

**三、计算题**(每小题 10 分,共 50 分)

1. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ e & 0 & f & 0 \\ 0 & g & 0 & h \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

**四、证明题**(1 小题 6 分,2、3 小题各 7 分共 20 分)

1. 证明:$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$

2. $n$ 阶行列式 $D$ 的每行元素之和为 $C$,则 $D$ 的每列元素的代数余子式之和为$\dfrac{D}{C}$

3. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为数域 $F$ 上互不相同的数,$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $F$ 上任一组给定的数,证明,存在唯一的 $F$ 上次数小于 $n$ 的多项式 $f(x)$,使 $f(a_i)=b_i,i=1,2,\cdots,n$.

## 典型例题解析

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$,求(1)$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$,(2)$2M_{41}-M_{42}+3M_{43}$.

**解**:因为 $A_{ij}$ 中不含有第 $i$ 行的元素,也就是 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$ 全与行列式中第 $i$ 行的元素无关,从而

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

同理

$$2M_{41}-M_{42}+3M_{43}=2M_{41}-M_{42}+3M_{43}+0\mathrm{M}_{44}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

2. 设 $A=(a_{ij})$ 是三阶不可逆矩阵,已知 $A$ 的行列式中 $a_{22}$ 的代数余子式 $A_{22}\neq 0$,则(　B　)是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系.

(A) $(A_{12},A_{22},A_{32})^T$

(B) $(A_{21},A_{22},A_{23})^T$

(C) $(A_{11},A_{21},A_{31})^T,(A_{12},A_{22},A_{32})^T$

(D) $(A_{11},A_{12},A_{13})^T,(A_{21},A_{22},A_{23})^T$

3. 计算

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_1 & & & & & & & b_1 \\ & a_2 & & & & & b_2 & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_n & b_n & & & \\ & & & c_n & d_n & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c_2 & & & & & d_2 & \\ c_1 & & & & & & & d_1 \end{vmatrix}$$

**解**:按第 1 列展开,得

$D_{2n}=(a_1d_1-b_1c_1)D_{2n-2}=(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)D_{2n-2}$

$=\cdots\cdots=(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)\cdots(a_nd_n-b_nc_n)$

4. 计算:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ a & a & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

**解**:原式 $\xlongequal[(-1)\text{倍加至上一行}]{\text{从第二行起每行乘以}}\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \\ a & a & a & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{加到最后一行}]{\text{第一行乘}(-a)\text{倍}}\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \\ a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{以}(-1)\text{倍加至上一行}]{\text{从第}n-1\text{行起,每行乘}}\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \\ a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{依第一行展开}}(1-a)^n+(-1)^{n+1}a^n$.

总结:主对角线(或副对角线)以上(或以下)元素相同的做法为前一行(或后一行)的(-1)倍加至后一行(前一行)

5. 计算：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1x_1 & 2+a_2x_1 & \cdots & n+a_nx_1 \\ 1+a_1x_2 & 2+a_2x_2 & \cdots & n+a_nx_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1+a_1x_n & 2+a_2x_n & \cdots & n+a_nx_n \end{vmatrix}$$

**解**：原式 $\xlongequal[\text{减去第一行}]{\text{从第二行起，每行}} \begin{vmatrix} 1+a_1x_1 & 2+a_2x_1 & \cdots & n+a_nx_1 \\ a_1(x_2-x_1) & a_2(x_2-x_1) & \cdots & a_n(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1(x_n-x_1) & a_2(x_n-x_1) & \cdots & a_n(x_n-x_1) \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1x_1 & 2+a_2x_1 & \cdots & n+a_nx_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$

$$= \begin{cases} 1+a_1x_1, \text{当 } n=1 \text{ 时} \\ (a_2-2a_1)(x_2-x_1) \text{当 } n=2 \text{ 时} \\ 0, \text{当 } n>2 \end{cases}$$

6. 计算：$D_n \begin{vmatrix} a_1c_1+b_1d_1 & a_1c_2+b_1d_2 & \cdots & a_1c_n+b_1d_n \\ a_2c_1+b_2d_1 & a_2c_2+b_2d_2 & \cdots & a_2c_n+b_2d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nc_1+b_nd_1 & a_nc_2+b_nd_2 & \cdots & a_nc_n+b_nd_n \end{vmatrix}$

**解**：$D_n = \left| \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \right| = 0$.（因为 $n>2$）

7. 计算：$D_n = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$ 其中，$\prod_{i=1}^{n} x_i \neq 0$

**解**：将 $D_n$ 的第一列写成两个数的和的形式：$a_1+x_1, 0-x_1, 0+0, \cdots 0+0$，则

$$D_n = a_1x_2x_3\cdots x_n + x_1 \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$（观察前一行与后一行之间的特点）

将第二行加至第三行，再将新的第三行加至第四行，以此继续下去，

$$a_1x_2x_3\cdots x_n+x_1\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ -1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 0 & x_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n\end{vmatrix}$$

(因为 $x_i\neq 0$)将第 $j$ 列的 $\frac{1}{x_j}$ 倍加至第 1 列($j=2,3,\cdots n$)

$$=a_1x_2x_3\cdots x_n+x_1\begin{vmatrix}1+\frac{a_n}{x_2}+\frac{a_3}{x_3}+\cdots+\frac{a_n}{x_n} & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n\end{vmatrix}$$

$$=a_1x_2x_3\cdots x_n+x_n\left(1+\frac{a_2}{x_2}+\frac{a_3}{x_3}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\right).$$

8. 计算:

$$D=\begin{vmatrix}b+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & b+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & b+a_n\end{vmatrix}(b\neq 0)$$

**解**:将 $D$ 添上一行一列,变成下列的 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & b+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & b+a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & b & 0 & & 0\\ -1 & 0 & b & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & 0\\ -1 & 0 & & 0 & b\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & b & 0 & & 0\\ 0 & 0 & b & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & 0\\ 0 & 0 & & 0 & b\end{vmatrix}$$

$$=b^n\left(1+\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

9. 求证:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b},$$

其中$f(x)=(x-x_1)\cdots(x_n-x_1),a\neq b$.

**证明**:$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a+0 \\ b & x_2 & a & \cdots & a+0 \\ b & b & x_3 & \cdots & a+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a+x_n-a \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}}_{\text{提}a\text{,再前一行的}(-1)\text{倍加至后一行}}+(x_n-a)D_{n-1}$

$$=a(x_1-b)(x_2-b)(x_3-b)\cdots(x_{n-1}-b)+(x_n-a)D_{n-1} \tag{1}$$

由行列式与转置行列式相等得:

$$D_n=b(x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)\cdots(x_{n-1}-a)+(x_n-b)D_{n-1} \tag{2}$$

由(1)(2)联立方程组解得

$$D_n=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$$

此行列式特点:主对角线以上是同一个元素,主对角线以下是同元素.

10. 计算:

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

**解**:(将第一列拆成两项之和:$x=y+(x-y),z=z+0,\cdots,z=z+0$)

原式$=\dfrac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}(y\neq z)$

$=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$

11. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

**解**:作如下行列式,使之配成范德蒙行列式

$$P(y)=\begin{vmatrix} 11\cdots11 \\ x_1x_2\cdots x_ny \\ x_1^2x_2^2\cdots x_n^2y^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{n-2}x_2^{n-2}\cdots x_n^{n-2}y^{n-2} \\ x_1^{n-1}x_2^{n-1}\cdots x_n^{n-1}y^{n-1} \\ x_1^nx_2^n\cdots x_n^ny^n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

易知 $D_n$ 等于 $P(y)$ 中 $y^{n-1}$ 的系数的相反数,而 $P(y)$ 中 $y^{n-1}$ 的系数为 $-\sum_{k=1}^{n}x_k\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$ ,因此,

$$D_n=\sum_{k==1}^{n}x_k\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\ .$$

12. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}.$$

$$D\overset{(3)+(y+z)(1)}{=}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ xy+xz+yz & y^2+yz+xz & yz+z^2+xy \end{vmatrix}$$

解:

$$\overset{(3)+x(1)}{=}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^2+xy+yz+xz & y^2+xy+yz+xz & z^2+xy+yz+xz \end{vmatrix}.$$

$$=(xy+yz+xz)(y-x)(z-x)(z-y)$$

13 计算: $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$

解:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}\overset{a_i\neq0}{\underset{i=1,2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n.$$

而当 $a_1a_2\cdots a_n=0$ 时可分只有一个因子为零或至少有两个因子为零可得同样的结果.

14. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

**解**:$D_1=\cos\alpha, D_2=\cos 2\alpha$,

于是猜想 $D_n=\cos n\alpha$.

**证明**:对级数用第二数学归纳法证明.

$n=1$ 时,结论成立. 假设对级数小于 $n$ 时,结论成立. 将 $n$ 级行列式按第 $n$ 行展开,有

$$D_n=2\cos\alpha\cdot D_{n-1}+(^-1)2n-1\cdot\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=2\cos\alpha\cdot D_{n-1}+(^-1)2n-1D_{n-2}$$

$$=2\cos\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha+(^-1)2n-1\cos(n-2)\alpha$$

$$=2\cos\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha-\cos(n-1)\alpha\cos\alpha-\sin(n-1)\alpha\sin\alpha$$

$$=\cos[(n-1)\alpha+\alpha]=\cos n\alpha$$

15. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} c & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & c \end{vmatrix}$$ (三对角线行列式)

**解**:$D_n=cD_{n-1}-baD_{n-2}$,设 $\alpha,\beta$ 是 $x^2-cx+ba=0$ 的根,则

$$\alpha=\frac{c+\sqrt{c^2-4ab}}{2},\beta=\frac{c-\sqrt{c^2-4ab}}{2}$$

若 $c^2-4ab\neq 0$,则 $\alpha\neq\beta$,于是

$$D_n=\frac{\alpha^{n-1}(D_2-\beta D_1)-\beta^{n-1}(D_2-\alpha D_1)}{\alpha-\beta}$$

易算得 $D_2-\beta D_1=\alpha^2$, $D_2-\alpha D_1=\beta^2$,所以

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\frac{(c+\sqrt{c^2-4ab})^{n+1}-(c-\sqrt{c^2-4ab})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{c^2-4ab}}$$

若 $c^2=4ab$,则 $\alpha=\beta$

$$D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)\alpha^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=(\frac{c}{2})^n(n+1)$$

1)若 $D_n = pD_{n-1}$，则 $D_n = p^{n-1}D_1$

2)若 $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$，$n>2, q\neq 0$,我们可以设

$\alpha$ ,$\beta$ 是 $x^2 - px - q = 0$ 的根,则 $\alpha + \beta = p$ ，$-\alpha\beta = q$,于是有

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) \tag{1}$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) \tag{2}$$

若 $\alpha\neq\beta$,则 $D_n = \dfrac{\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta} = \alpha^{n-1}A + \beta^{n-1}B$

若 $\alpha = \beta$,则 $D_n = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)\alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) = \alpha^{n-1}A + (n-1)B\alpha^{n-2}$

其中,$A$,$B$ 为待定系数.

16. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解:将行列式按第 $n$ 列展开,有

$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$,

则 2,3 是方程组 $x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$ 的两根,从而有

$D_n = 2^{n-1}A + 3^{n-1}B$

由 $\begin{cases} D_1 = A + B = \alpha + \beta \\ D_2 = \alpha A + \beta B = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \end{cases}$ 得

$A = -4, B = 9$

则 $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

17. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ y & a & x & \cdots & x \\ y & y & a & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解:$D_n = \begin{vmatrix} a-y & x & x & \cdots & x \\ 0 & a & x & \cdots & x \\ 0 & y & a & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & y & y & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & x & x & \cdots & x \\ y & a & x & \cdots & x \\ y & y & a & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$=(a-y)D_{n-1}+y\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\1 & a-x & 0 & \cdots & 0\\1 & y-x & a-x & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\1 & y-x & y-x & \cdots & a-x\end{vmatrix}$$

$=(a-y)D_{n-1}+y(^{a}-x)n-1$

同理

$D_n=(a-x)D_{n-1}+x\,(a-y)^{n-1}$

联立解得

$$D_n=\frac{x(a-y)^n-y\,(a-x)^n}{x-y},(x\neq y)$$

当 $x=y$ 时,

$D_n=(a-x)D_{n-1}+x(^{a}-x)n-1$

$=(^{a}-x)2D_{n-2}+2x(^{a}-x)n-1$

$=\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=(^{a}-x)n-2D_2+(n-2)x(^{a}-x)n-1$

$=(^{a}-x)n-1[a+(n-1)x]$

18. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\1 & x+1 & 3 & \cdots & n\\1 & 2 & x+3 & \cdots & n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\1 & 2 & 3 & \cdots & x+1\end{vmatrix}.$$

**解**:注意 $x=1$ 时,$D_n=0$,所以,$x-1\mid D_n$.

同理 $x-2,\cdots,x-(n-1)$ 均为 $D_n$ 的因式

又 $x-i$ 与 $x-j(i\neq j)$ 各不相同

所以$(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)\mid D_n$

但 $D_n$ 的展开式中最高次项 $x^{n-1}$的系数为 1,

所以 $D_n=(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$

注:此题也可化为三角形行列式计算.

19. 计算

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2\\\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n\end{vmatrix}$$

**解**:考虑

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_k)\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

令 $f(z)=D\ (-1)^{n+3}\Delta$ 是 $f(z)$ 中 $z$ 的系数，由等式右边知 $z$ 的系数是 $(-1)^{n-1}$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i)\cdot\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_k)$，故

$$\Delta=(-1)^{n+3}(-1)^{n-1}\left[(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i})\prod_{i=1}^{n}x_i\right]\cdot\prod_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_k)=\left[(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i})\prod_{i=1}^{n}x_i\right]\cdot\prod_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_k)$$

20. 计算

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & x_1 & 0 & \cdots & x_1^{n-1} & 0\\ 0 & 1 & 0 & y_1 & \cdots & 0 & y_1^{n-1}\\ 1 & 0 & x_2 & 0 & \cdots & x_2^{n-2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & y_2 & \cdots & 0 & y_2^{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & x_n & 0 & \cdots & x_n^{n-1} & 0\\ 0 & 1 & 0 & y_n & \cdots & 0 & y_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

**解**：取第 1，3，…2$n$－1 行，第 1，3，…，2$n$－1 列展开得

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & y_1 & \cdots & y_1^{n-1}\\ 1 & y_2 & \cdots & y_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & y_n & \cdots & y_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)$$

21. 证明一个 $n$ 次多项式之多有 $n$ 个互异根.

**证明**：设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 有 $n+1$ 个互异的零点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$，则有 $f(x_i)=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\cdots+a_nx_i^n=0,1\leqslant i\leqslant n+1$.

即

$$\begin{cases}a_0+x_1a_1+x_1^2a_2+\cdots+x_1^na_n=0,\\ a_0+x_2a_2+x_2^2a_2+\cdots+x_2^na_n=0,\\ \qquad\cdots\\ a_0+x_{n+1}a_n+x_{n+1}^2a_2+\cdots+x_{n+1}^na_n=0.\end{cases}$$

这个关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的齐次线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(x_i-x_j)\neq 0,$$

因此 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. 这个矛盾表明 $f(x)$ 至多有 $n$ 个互异根.

22. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $n$ 个两两互异的数. 证明对任意 $n$ 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，存在惟一的次数小于 $n$ 的多项式 $L(x)$：

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}b_i\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j},$$

使得 $L(a_i)=b_i,1\leqslant i\leqslant n$.

**证明**：从定义容易看出 $L(x)$ 的次数小于 $n$，且 $L(a_i)=b_i$，故只需证明唯一性即可.

设 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$ 满足

$f(a_i)=b_i,1\leqslant i\leqslant n$，

即

$$\begin{cases}c_0+a_1c_1+a_1^2c_2+\cdots+a_1^{n-1}c_{n-1}=b_1,\\ c_0+a_2c_1+a_2^2c_2+\cdots+a_2^{n-1}c_{n-1}=b_2,\\ \qquad\cdots\\ c_0+a_nc_1+a_n^2c_2+\cdots+a_n^{n-1}c_{n-1}=b_n.\end{cases}$$

这个关于 $c_0,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 的线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq0,$$

故 $c_0,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 是唯一的，必须 $f(x)=L(x)$.

这就是拉格朗日插值公式.

23. 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 个复系数多项式，满足

$1+x+\cdots+x^{n-1}\mid f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n)$，

证明 $f_1(1)=f_2(1)=\cdots=f_{n-1}(1)=0$.

**证明**：设 $f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n)=p(x)(1+x+\cdots+x^{n-1})$，取 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，分别以 $x=\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$ 代入，可得

$$\begin{cases}f_1(1)+\omega f_2(1)+\cdots+\omega^{n-2}f_{n-1}(1)=0,\\ f_1(1)+\omega^2f_2(1)+\cdots+\omega^{2(n-2)}f_{n-1}(1)=0,\\ \qquad\cdots\\ f_1(1)+\omega^{n-1}f_2(1)+\cdots+\omega^{(n-1)(n-2)}f_{n-1}(1)=0.\end{cases}$$

这个关于 $f_1(1),f_2(1),\cdots,f_{n-1}(1)$ 的齐次线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&\omega&\cdots&\omega^{n-2}\\1&\omega^2&\cdots&\omega^{2(n-2)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\omega^{n-1}&\cdots&\omega^{(n-1)(n-2)}\end{vmatrix}\neq0,$$

因此 $f_1(1)=f_2(1)=\cdots=f_{n-1}(1)=0$.

24. 设 $n$ 是奇数，$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 个复系数多项式，满足

$x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+1|f_1(x^{n-2})+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n)$,

证明$f_1(-1)=f_2(-1)=\cdots=f_{n-1}(-1)=0$.

证　注意到当 $n$ 是奇数时,

$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+1)$,

可按照上例的思路完成证明.

25. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

其中 $\varphi_k(x)=x^k+a_{1k}x^{k-1}+\cdots+a_{nk}$.

**解**:注意到下面的等式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{22} & a_{12} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1n-1} & a_{n-2n-1} & a_{n-3n-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

即得

$D_n=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$.

26. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \cdots & \binom{x_n}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \cdots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix},$$

其中$\binom{x}{k}=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$.

**解**:直接利用上例可得

$$D_n=\frac{1}{1!\ 2!\ \cdots(n-1)!}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

27. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正整数,证明 $n$ 阶行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

能被 $1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1)$ 整除.

证　直接运用例6、例7可得

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1(a_1-1) & \cdots & a_1(a_1-1)(a_1-2)\cdots(a_1-n+2)\\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & \cdots & a_2(a_2-1)(a_2-2)\cdots(a_2-n+2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n(a_n-1) & \cdots & a_n(a_n-1)(a_n-2)\cdots(a_n-n+2)\end{vmatrix}$$

$$=1!\ 2!\ \cdots(n-1)!\begin{vmatrix}1 & \binom{a_1}{1} & \binom{a_1}{2} & \cdots & \binom{a_1}{n-1}\\ 1 & \binom{a_2}{1} & \binom{a_2}{2} & \cdots & \binom{a_2}{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \binom{a_n}{1} & \binom{a_n}{2} & \cdots & \binom{a_n}{n-1}\end{vmatrix}$$

能被 $1!\ 2!\ \cdots(n-1)!\ =1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1)$ 整除.

28. 计算 $n$ 阶范德蒙德行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1}\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2}\end{vmatrix},$$

其中 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

**解**:注意到 $\varepsilon^k=1$ 当且仅当 $n|k$,可得

$$V_n^2=\begin{vmatrix}n & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n\\ 0 & 0 & \cdots & n & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & n & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^n,$$

由此 $V_n=\pm i^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^{\frac{n}{2}}$, $V_n$ 的模 $|V_n|=n^{\frac{n}{2}}$. 现在来确定 $V_n$ 的幅角:令 $\alpha=\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n}$, $\varepsilon=\alpha^2$,故

$$V_n=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n-1}(\varepsilon^k-\varepsilon^j)=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n-1}(\alpha^{2k}-\alpha^{2j})$$

$$=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n-1}\alpha^{k+j}(\alpha^{k-j}-\alpha^{-(k-j)})$$

$$=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n-1}\alpha^{k+j}\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n-1}2i\cdot\sin\frac{(k-j)\pi}{n}.$$

对于上面考虑的 $j$ 和 $k$,总有 $0<k-j<n$,这意味着 $\sin\dfrac{(k-j)\pi}{n}>0$,因此

$$|V_n|=\prod_{0\leq j<k\leq n-1}2\sin\frac{(k-j)\pi}{n}=n^{\frac{n}{2}},$$

由此可设 $V_n=|V_n|\cdot\beta$,其中

$$\beta=\prod_{0\leq j<k\leq n-1}\alpha^{k+j}\prod_{0\leq j<k\leq n-1}i=i^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\alpha^{\frac{n(n-1)^2}{2}}$$

$$=i^{\frac{n(n-1)}{2}}(\alpha^{\frac{n}{2}})^{(n-1)^2}=i^{\frac{n(n-1)}{2}}i^{(n-1)^2}$$

$$=i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}},$$

这样就求得了 $V_n=i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}n^{\frac{n}{2}}$.

29. 证明缺项的 $n$ 阶范德蒙德行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2^2&3^2&\cdots&n^2\\1&2^3&3^3&\cdots&n^3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2^n&3^n&\cdots&n^n\end{vmatrix}$$

$$=1!\ 2!\ 3!\ \cdots n!\ \left[\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}\right].$$

**证**:按 $V_n$ 的第一行展开行列式,可得

$$V_n=\begin{vmatrix}2^2&3^2&\cdots&n^2\\2^3&3^3&\cdots&n^3\\\vdots&\vdots&&\vdots\\2^n&3^n&\cdots&n^n\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&3^2&\cdots&n^2\\1&3^3&\cdots&n^3\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&3^n&\cdots&n^n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2^2&4^2&\cdots&n^2\\1&2^3&4^3&\cdots&n^3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2^n&4^n&\cdots&n^n\end{vmatrix}-\cdots$$

$$+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1&2^2&\cdots&(n-1)^2\\1&2^3&\cdots&(n-1)^3\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2^n&\cdots&(n-1)^n\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{(n!)^2}{i^2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&i-1&i+1&\cdots&n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2^{n-2}&\cdots&(i-1)^{n-2}&(i+1)^{n-2}&\cdots&n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{(n!)^2}{i^2}\cdot\frac{(n-1)!\ (n-2)!\ \cdots 2!\ 1!}{(i-1)!\ (n-i)!}$$

$$=1!\ 2!\ \cdots n!\ \left[\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}\right].$$

30. 设有 $n$ 个常数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,$n$ 个两两不同的常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 以及由 $x$ 的恒等式

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & p(x) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & b_n \end{vmatrix} \equiv 0$$

定义的一个多项式 $p(x)$. 对于一个已知多项式 $\varphi(t)$,定义另一个多项式 $Q(x)$,它为上面的恒等式中将 $p(x), b_1, b_2, \cdots, b_n$ 分别代之以 $Q(x), \varphi(b_1), \varphi(b_2), \cdots, \varphi(b_n)$ 所得的 $x$ 的恒等式所确定. 证明用多项式 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 除以 $\varphi(p(x))$ 所得的余式为 $Q(x)$.

**证**:由于 $n$ 阶范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n}(a_k - a_j) \neq 0,$$

按题设这里的行列式的最后一列展开,可知 $p(x)$ 是个次数小于 $n$ 的多项式. 从条件知对每个 $a_i$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_i & a_i^2 & \cdots & a_i^{n-1} & p(a_i) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p(a_i)-b_i \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & b_n \end{vmatrix} = 0,$$

必须 $p(a_i) = b_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. 由拉格朗日插值公式知

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

同理可求出由恒等式

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & Q(x) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & \varphi(b_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & \varphi(b_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & \varphi(b_n) \end{vmatrix} \equiv 0$$

所定义的多项式

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(b_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

设 $\varphi(p(x)) = q(x) \cdot (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) + r(x)$,其中 $r(x)$ 的次数小于 $n$. 为证 $r(x) = Q(x)$,只需证明 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时,$r(a_i) = Q(a_i)$ 即可. 事实上,对每个 $a_i$,$r(a_i) = \varphi(p(a_i)) = \varphi(b_i) = Q(a_i)$ 是易见的,因此结论成立.

31. 设 $f(y)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)$ 内存在 2 阶导数,证明在 $a < x < b$ 上有

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{1}{2} f''(c),$$

这里 $c\in(a,b)$.

特别地,存在 $c'\in(a,b)$,使

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c').$$

**证**:在$[a,b]$上构造函数

$$F(y)=\begin{vmatrix}1 & y & y^2 & f(y)\\ 1 & a & a^2 & f(a)\\ 1 & x & x^2 & f(x)\\ 1 & b & b^2 & f(b)\end{vmatrix},$$

则 $F(y)$在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内存在 2 阶导数. 因 $F(a)=F(x)=F(b)=0$,由中值定理存在 $a<x_1<x<x_2<b$,使 $F'(x_1)=F'(x_2)=0$,故再运用一次中值定理,存在 $c\in(x_1,x_2)$,使 $F''(c)=0$,即

$$F''(c)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 2 & f''(c)\\ 1 & a & a^2 & f(a)\\ 1 & x & x^2 & f(x)\\ 1 & b & b^2 & f(b)\end{vmatrix}=0,$$

展开行列式即得

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{1}{2}f''(c).$$

特别地,取 $x=\dfrac{a+b}{2}$,则有相应的 $c'\in(a,b)$,使上式成立,即

$$\frac{\dfrac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{a+b}{2}-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\dfrac{a+b}{2}-b}=\frac{1}{2}f''(c'),$$

化简即得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c').$$

32. 设 $f(x)$在$[a,b]$内存在 $n-1$ 阶导数,$a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 证明存在 $c\in(a,b)$,使 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f(x_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i-x_j)}=\dfrac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}$.

证　在$[a,b]$上构造函数

$$F(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & f(x)\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1)\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & f(x_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n)\end{vmatrix},$$

$F(x)$在$[a,b]$内存在 $n-1$ 阶导数. 因 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=0$,反复利用微分中值定

理,存在 $c \in (a,b)$,使 $F^{(n-1)}(c)=0$,即

$$F^{(n-1)}(c)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (n-1)! & f^{(n-1)}(c) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}=0.$$

按第一行展开行列式得

$$(n-1)!\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & f(x_n) \end{vmatrix}=f^{(n-1)}(c)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

左边按最后一列展开行列式,化简可得

33. 设 $f(x)$ 在 $[a,a+nh]$ 内存在 $n$ 阶导数,这里 $h>0$. 证明存在 $a<c<a+nh$,使

$$f(a+nh)-\binom{n}{1}f(a+(n-1)h)+\binom{n}{2}f(a+(n-2)h)-\cdots+(-1)^n f(a)=h^n f^{(n)}(c).$$

证　置 $x_i=a+ih, 0\leqslant i\leqslant n$,则 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=a+nh$. 于是此题在本质上是上题的特殊情形.

34. 设 $B=(a_{ij})_{n\times m}$,$M$ 是 $D=|B|$ 的 $k$ 阶子式,$A$ 是 $M$ 的代数余子式,$D^*$ 是 $B$ 的伴随矩阵的行列式,$M^*$ 是 $D^*$ 中与 $M$ 相对应的子式,证明:$M^*=D^{k-1}A$

证明 (1)设 $M$ 是 $B$ 的前行前列交叉处元素构成的子式(即 $k$ 阶顺序主子式),此时

$$M^*=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{k1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{kk} \end{vmatrix}$$

用 $I_{n-k}$ 表示 $n-k$ 阶单位矩阵,令

$$\Delta=\left|\begin{array}{ccc:c} A_{11} & \cdots & A_{k1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{1k} & \cdots & A_{kk} & \\ \hdashline A_{1k+1} & \cdots & A_{kk+1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & I_{n-k} \\ A_{1n} & \cdots & A_{kn} & \end{array}\right|$$

则 $\Delta=M^*$

于是

$$DM^* = D\Delta = \left|\begin{array}{ccc:ccc} D & & & & & \\ \hdashline & D & & & a_{1,k+1} & \cdots \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & D & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hdashline & & & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ & O & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = D^k A.$$

($i$)若 $D\neq 0$,显然 $M^* = D^{k-1}A$.

($ii$)若 $D=0$,当 $r(B)<n-1$,$D^*$ 的每个元素为0,则 $M^* = D^{k-1}A$;

当 $r(B)=n-1$,则 $r(B^*)=1$,那么

若 $M^*$ 的阶数是1,则 $M^*=A$,由 $D^{k-1}=D^0=I$ 得 $M^* = D^{k-1}A$.

若 $M^*$ 的阶数$\geqslant 2$,则 $M^*=O$,从而 $M^* = D^{k-1}A$.

(2)若 $M$ 是一般的子式,可以通过换行换列化为(1). 当给 $D$ 换行换列时,$D^*$ 发生同样的变化,而且所有的元素变号.

35. 证明:$D=|a_{ij}|_{n\times m}$的代数余子式之和等于

$$D_1 = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \cdots & a_{3n}-a_{1n} \\ \hdashline a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{array}\right|.$$

证:因

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \hdashline a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{array}\right| = D + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

取 $x=1$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij} = \left|\begin{array}{cccc} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \hdashline a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

对右边每个行列式的第一行乘$(-1)$加到其余各行,得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij} = \left|\begin{array}{cccc} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \hdashline a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{array}\right| = D_1$$

36. 若行列式的所有元素都加上同一个数,则这个行列式所有元素的代数余子式之和不变.

证明:由上题可知 $\left|\begin{array}{cccc} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \hdashline a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{array}\right|$

的代数余子式之和等于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \cdots & a_{3n}-a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

37. 若行列式的某一行元素都等于 1,则行列式等于它的所有代数余子式之和.

证 不设防

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{则 } D_1 = \begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & \cdots & 1-1 \\ a_{21}-1 & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n}-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-1 & a_{n2}-1 & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} = 0$$

但 $D_1 - D - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 0$,故 $D = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$

38. 若行列式 $D = |a_{ij}|_{n\times m}$ 的每行元素的和及每列元素的和等于 0,则各元素的代数余子式都相等.

证

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将各列加到第一列,得

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} \begin{vmatrix} -a_{2j}-a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}-a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将第一列换到第 $j$ 列有 $A_{1j} = (-1)^{2+j}(-1)^{j-2}A_{11} = A_{11}$

同理可证,$A_{ij}A_{i1}$, $i=2,\cdots,n$

类似地可证 $A$ 的第一列各元素的代数余子式 $A_{i1} = A_{11}$ 即 $A_{ij} = A_{11}$ 对任意的 $i,j$ 成立.

39. 在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n-11}x_1 + a_{n-12}x_2 + \cdots + a_{n-1n}x_n = 0 \end{cases}$$

中,证

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix}, x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix}.$$

$$\cdots\cdots, x_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

是解且若这个解不为零,则方程组的任意解可由它乘以某数得到

**证:**作方程组 $AX=0$,其中

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix}=0$$

显然 $x_1=A_{11},x_2=A_{12},\cdots,x_n=A_{1n}$是 $A$ 中第一行元素的代数余子式,因为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix}=0,$$

我们有 $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=0.$

另外,$a_{i1}A_{11}+a_{i2}A_{12}+\cdots+a_{in}A_{1n}=0,i=2,3,\cdots,n$,故 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是原方程组的解. 若这个解不为零,则至少有一个 $x_i\neq0$,即方程组系数矩阵的秩是 $n-1$,它的基础解系含一个解,故非零解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是它的基础解系,于是

方程组的任意解是 $kx_1,kx_2,\cdots,kx_n,k$ 是任意数.

40. 设 $n$ 阶实矩阵 $A=(a_{ij})$,,证明:

(1)若 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq1}|a_{ij}|,1\leqslant i\leqslant n$ ,则 $|A|\neq0$.

(2)若 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq1}|a_{ij}|,1\leqslant i\leqslant n$ 则 $|A|>0$.

证:(1)若 $|A|=0$,则 $A$ 的列向量线性相关,故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1n}k_n=0 \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2n}k_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nn}k_n=0 \end{cases}$$

不妨设 $|k_1|$是$|k_i|$中最大的数,则 $|k_1|>0$,于是

$|a_{n1}k_1|=\ -a_{12}k_2-\cdots-a_{1n}k_n$ 即

$|a_{11}k_1|\leqslant|a_{12}||k_2|+\cdots+|a_{1n}||k_n|\leqslant(|a_{12}|+\cdots+|a_{1n}|)|k_1|.$

于是 $|a_{11}|\leqslant\sum\limits_{j\neq1}|a_{1j}|$,与已知矛盾,

故 $|A|\neq0$.

(2)令 $A_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}x & \cdots & a_{1n}x \\ a_{21}x & a_{22} & \cdots & a_{2n}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x & a_{n2}x & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

则 $f(x)=|A_1|$是一个实系数多项式,当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,有

$a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\geqslant x\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|=\sum\limits_{j\neq i}|xa_{ij}|$.

由(1)知,对$[0,1]$中的任何数 $x$ 都有 $f(x)\neq0$,

特别当 $x=1$ 时有 $|A|\neq0$.

若 $|A|f(1)<0$,又 $f(0)=a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}>0$,

由 $f(x)Z$ 的连续性知存在 $x_0(0<x_0<1)$,使 $f(x_0)=0$,

这与 $f(x)\neq0,0\leqslant x\leqslant1$,矛盾.

# 第三章 线性方程组与矩阵

## §1 线性方程组

**一、高斯消元法**

用初等行变换化增广矩阵成阶梯形矩阵. 因此,解线性方程组可以通过矩阵来进行,而从化成的阶梯形矩阵就可以判别方程组有解还是无解,在有解的情形,回到阶梯形方程组去解.

**二、$n$ 维向量**

1. 相等: 如果 $n$ 维向量

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

的对应分量都相等,即

$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

就称这两个向量是相等的,记作 $\alpha=\beta$.

2. 加法: 向量 $\gamma=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$

称为向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$的和,记为 $\gamma=\alpha+\beta$

零向量: 分量全为零的向量$(0,0,\cdots,0)$,记为0;

负向量: 向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$称为向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的负向量,记为 $-\alpha$.

$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

3. 数量乘法:设 $k$ 为数域 $P$ 中的数,向量$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$称为向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与数 $k$ 的数量乘积,记为 $k\alpha$

向量通常是写成一行:

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

或写成一列:

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}.$$

前者称为行向量,后者称为列向量. 它们的区别只是写法上的不同.

**三、线性相关性**

1. 所谓向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 成比例就是说有一数 $k$ 使 $\alpha=k\beta$.

2. 线性组合:向量 $\alpha$ 称为向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的一个线性组合,如果有数域 $P$ 中的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使

$\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s$,

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 叫做这个线性组合的系数.

例如,任一个 $n$ 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都是向量组

$$\begin{cases}\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\\ \varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)\end{cases}$$

的一个线性组合. 即 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$

向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 称为 $n$ 维单位向量.

3. 向量组的等价:如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 中每一个向量 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$ 都可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出,那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 就称为可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出. 如果它们可以互相线性表出,就称为等价.

向量组等价具有以下性质:1)反身性 2)对称性 3)传递性

4. 向量组的线性相关:

1)如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$ 中有一个向量是可以由其余的向量的线性表出,那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

或: 2)如果有数域 $P$ 中不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

5. 线性无关:如果 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 称为线性无关.

6. 极大线性无关组:向量组的一个部分组,如果本身是线性无关的,并且从这个向量组中任意添一个向量(如果还有的话),所得的部分向量组都线性相关.

定理 1 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是两个向量组. 如果

1)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可以经 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出,

2)$r>s$,

那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 必线性相关.

**推论 1** 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出,且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,那么 $r\leqslant s$.

**推论 2** 任意 $n+1$ 个 $n$ 维向量必线性相关.

**推论 3** 两个线性无关的等价的向量组,必含有相同个数的向量.

**推论 4** 一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量.

**例 2** 在向量空间 $P[x]$ 里,对于任意非负整数 $n$

$1,x,x^2,\cdots,x^n$

线性无关.

**例 3** 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则向量组 $2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+5\alpha_3,4\alpha_3+3\alpha_1$ 也线性无关.

注(1)零向量是任意向量组的线性组合.

(2)任意一个包含零向量的向量组一定是线性相关的.

(3)向量组 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性相关就表示 $\alpha_1=k\alpha_2$ 或者 $\alpha_2=k\alpha_1$(这两个式子不一定能同时成立).

(4)单独一个零向量线性相关,单独一个非零向量线性无关.

(5)如果一向量组的一部分线性相关,那么这个向量组就线性相关.

(6)如果一向量组线性无关,那么它的任何一个非空的部分组也线性无关.

(7)两个向量成比例充要条件是这两向量线性相关.

(8)由 $n$ 维单位向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 组成的向量组是线性无关的.

(9)如果向量组线性无关,那么在每一个向量上添一个分量所得到的 $n+1$ 维的向量组也线性无关.

(10)一个线性无关向量组的极大线性无关组就是这个向量组本身.

(11)任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价.

(12)一向量组的任意两个极大线性无关组都等价.

(13)一向量组线性无关的充要条件是它的秩与它所含向量的个数相同.

(14)每一向量组都与它的极大线性无关组等价. 由等价的传递性可知,任意两个等价向量组的极大线性无关组也等价. 所以,等价的向量组必有相同的秩.

(15)全部由零向量组成的向量组没有极大线性无关组. 规定这样的向量组的秩为零.

**四、矩阵乘积的行列式**

**定理2**　设 $A,B$ 是数域 $P$ 上的两个 $n\times n$ 矩阵,那么

$|AB|=|A||B|$,

即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积.

**推论1**　设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是数域 $P$ 上的 $n\times n$ 矩阵,于是

$|A_1A_2\cdots A_m|=|A_1||A_2|\cdots|A_m|$

注一 $n\times n$ 矩阵是非退化的充要条件是它的秩等于 $n$.

**推论2**　设 $A,B$ 是数域 $P$ 上 $n\times n$ 矩阵,矩阵 $AB$ 为退化的充要条件是 $A,B$ 中至少有一个是退化的.

## §2 线性方程组与矩阵

线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{1}$$

令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$

其中 $A$ 称为系数矩阵,则方程组(1)可以写成矩阵的乘积 $AX=B$.

对于方程组(1)引入向量:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

于是线性方程组(1)可以改写成向量方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta. \tag{2}$$

线性方程组(1)有解的充要条件为向量 $\beta$ 可以表成向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合.

**定理 3** 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$$

的系数矩阵行秩 $r<n$,那么它有非零解.

**定理 4** $n\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots\ \vdots\ \vdots\\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

的行列式为零的充要条件是 $A$ 的秩小于 $n$.

**定理 5** 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

的系数矩阵的行列式 $|A|\neq0$,那么它只有零解. 换句话说,如果方程组有非零解,那么必有 $|A|=0$.

**推论** 齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

有非零解的充要条件是它的系数矩阵的行列式等于零.

**定理 6** 线性方程组(1)有解的充要条件为它的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix}$$

与增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s\end{pmatrix}$$

有相同的秩.

即：当系数矩阵与增广矩阵的秩相等时，方程组有解；当增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩加1时，方程组无解.

我们都知道 $n$ 元线性方程组的解有三种情况：唯一解、无穷解及无解，在上一章我们简绍了伪逆矩阵，伪逆矩阵具有逆矩阵的性质，下面我们就应用逆矩阵、伪逆矩阵对线性方程组 $AX=B$ 的解作进一步的讨论.

有唯一解的情况：

当线性方程组 $AX=B$ 有唯一解时，必有 $r(A)=r(AB)=n=m$，此时方程组的解是 $X=A^{-1}B$.

有无穷解的情况：

当线性方程组 $AX=B$ 有无穷组解时，必有 $r(A)=r(AB)<n$.

如线性方程 $x_1+x_2=2$，一个方程，却有两个变量，因此有无穷组解. 其解为 $x_1,x_2$ 平面上的一条直线上的所有点，但是要找一个到原点最近距离的点，则解是惟一的. 一般地，对于线性方程组 $AX=B$，当有无穷组解时，我们要找出最接近原点的解，即最小范数解，则它是惟一的. 令这个最小范数解为 $X^0$，即 $X^0$ 满足以下条件：

$AX^0=B$，且对所有满足 $AX=B$ 的 $X$，有：$||X^0||\leqslant||X||$，这表示在 $X$ 对应的 $n$ 维空间中，$X^0$ 是所有满足 $AX=B$ 的解中最靠近原点的.

$X^0$ 的构造如下：$X^0=A^{RM}B=A'(AA')^{-1}B$

例：给定线性方程组 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}$$

求此方程组的最小范数解 $X^0$

**解**：$X^0=A^{RM}B=A'(AA')^{-1}B$

$$=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.5556\\1.1111\\2.7778\end{pmatrix}$$

无解的情况：

当线性方程组 $AX=B$ 无解时，必有 $r(A)\neq r(AB)$.

如果方程组无解，我们希望能够找到可以使范数 $||AX-B||$ 最小化的解. 令此解为 $X^0$，即 $X^0$ 满足以下条件：

$||AX-B||\geqslant||AX^0-B||$

这里 $X$ 不是传统意义上的解，因为它不满足代数方程组 $AX=B$，因此 $X^0$ 被称为可使 $||AX-B||$ 最小化的近似解，$X^0$ 的构造如下：

$X^0=A^{LM}B=(A'A)^{-1}A'B$

**例**：给定线性方程组 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&4\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

求此方程组的最小范数解 $X^0$

**解**：$X^0=A^{LM}B=(A'A)^{-1}A'B$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&4\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}1&&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5000\\0.6429\end{pmatrix}$$

最小二乘法问题 线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s-b_1=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s-b_2=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{ns}x_s-b_n=0\end{cases}$$

可能无解. 即任何一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 都可能使

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{is}x_s-b_i)^2 \tag{1}$$

不等于零. 我们设法找 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_s^0$ 使(1)最小,这样的 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_s^0$ 称为方程组的最小二乘解. 这种问题就叫最小二乘法问题.

## 自测题

**一、填空题**(每小题 3 分,共 15 分)

1. 线性方程组 $AX=b$ 无解,且 $r(A)=3$,则 $r(A\vdots b)=$________.

2. 若方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=\lambda-1\\3x_2-x_3=\lambda-2\\\lambda x_2-x_3=\lambda^2-6\lambda+10\end{cases}$ 有无穷多解,则 $\lambda=$________.

3. 设 $A$ 是方阵,线性方程组 $AX=X$ 有非零解的充分必要条件是________.

4. 当 $a=$________,$b=$________时,$A=\begin{pmatrix}a&1&2\\2&3&1\\8&b&4\end{pmatrix}$的秩为 2.

5. 设 $|A|\neq 0$, 且 $A$ 经若干次第三种初等变换化为 $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&d\end{pmatrix}$, 则 $|A|=$________.

**二、判断说明题**(先判断正确与错误,再简述理由. 每小题 5 分,共 20 分)

1. 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为 $A$,若存在三阶矩阵 $B\neq 0$. 使得 $AB=0$, 则 $\lambda=1$, 且 $|B|=0$.

2. 非齐次线性方程组 $AX=b$ 有解,若其解不唯一,则必有无穷多个解.

3. 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵，$|A|=0$ 是 $AX=b$ 有无穷多解的充分必要条件.

4. 若齐次线性方程组中方程的个数小于未知量的个数，则方程组必有无穷多解.

**三、计算题**(每小题 15 分，共 45 分)

1. $k$ 取何值时，方程组 $\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=k-3 \\ x_1+kx_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+kx_3=-2 \end{cases}$ 有唯一解？有无穷多解？无解？

2. $\lambda$ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} (\lambda-2)x_1-3x_2-2x_3=0 \\ -x_1+(\lambda-8)x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+14x_2+(\lambda+3)x_3=0 \end{cases}$ 有非零解？并求出一般解.

3. 给定两个线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=1-t \end{cases}$

(1)求(1)的通解

(2)$m,n,t$ 取何值时，$(II)$ 与 $(I)$ 同解？

**四、证明题**(每小题 10 分，共 20 分)

1. 设方程组 $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+8x_4=b_1 \\ 3x_1+4x_2+x_3+7x_4=b_2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=b_3 \end{cases}$

证明此方程组对任意实数 $b_1,b_2,b_3$ 都有解，并且求它的一切解.

2. 设线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ （＊）

的系数矩阵 $A$ 的秩等于矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩，证明方程组(＊)有解. 问：逆命题是否成立？为什么？

# 典型例题解析

1. $A,B\in P^{n\times n}$,证明 $r(AB)=r(B)$ 的充要条件为 $(AB)X=0$ 与 $BX=0$ 同解;其中 $r(B)$ 表示 $B$ 的秩,$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

证明:“$\Leftarrow$”

$ABX=0$① 与 $BX=0$② 同解,

则 方程①与②基础解系所含的解向量个数相等,

令为 $k$,则 $r(AB)=r(B)=n-k$

“$\Rightarrow$”

若 $r(AB)=r(B)=t$,

那么 方程①与②所含的基础解系解向量个数就相同,都为 $n-t$,

而②的解都是①的解,

则 ②的基础解系也为①的基础解系,

故 ①与②同解.

2. 设 $A$ 是 $m\times n$ 实矩阵,证明 $r(A)=r(A^TA)$.

(即 $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$)

**证明**:对于方程组 $AX=0$ ①与 $A^TAX=0$ ②,

显然①的解是②的解,

在②式左右两边同时左乘 $X^T$,得 $X^TA^TAX=0$,即 $(AX)^T(AX)=0$

从而有 $AX=0$,于是②的解也是①的解,

由此可知,①与②同解.

3. 设 $A$ 为 $n$ 阶实矩阵,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 为 $n$ 维实向量,证明:$A'AX=A'b$ 必定有解.

证明:因为 $r(A)=r(A'A)$.

而 $r(A'A,A'b)=r(A'(A,b))\leqslant r(A')=r(A)=r(A'A)$,

又 $r(A'A,A'b)\geqslant r(A'A)$

故 $r(A'A,A'b)=r(A'A)$

从而

$A'AX=A'b$ 必有解.

4. 设 $n$ 阶实矩阵 $A,B,C$ 满足 $CAA^T=BAA^T$,证明 $CA=BA$.

证明:因为 $r(A)=r(AA^T)$

故 $AX=0$ 与 $AA^TX=0$ 同解;或 $YA=0$ 与 $YAA^T=0$ 同解

由 $CAA^T=BAA^T$ 得 $(C-B)AA^T=0$

从而知 $C-B$ 为 $YAA^T=0$ 的解,

亦即 $C-B$ 为 $YA=0$ 的解,则 $(C-B)A=0$

于是有 $CA=BA$.

5. 两个 $m\times n$ 矩阵 $A$ 与 $B$ 的行向量组等价的充要条件是 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

证明:“$\Leftrightarrow$”

设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$

$AX=0$ 与 $BX=0$ 同解，则 $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}X=0$ 与 $AX=0$ 或 $BX=0$ 同解，

那么 $\begin{pmatrix}A\\ \beta_j\end{pmatrix}X=0$ 与 $AX=0$ 同解，且 $\begin{pmatrix}B\\ \alpha_i\end{pmatrix}X=0$ 与 $BX=0$ 同解，

从而 $r\begin{pmatrix}A\\ \beta_j\end{pmatrix}=r(A)$ 且 $r\begin{pmatrix}B\\ \alpha_i\end{pmatrix}=r(B)$

故 $\beta_j$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，$\alpha_i$ 可以由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出，

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价.

由此题进一步得到：$A^TA$ 的列向量组可以经 $A^T$ 的列向量组线性表出；$A^TB$ 的列向量组可以经 $A^T$ 的列向量组线性表出.

6. 设 $A$ 是实半正定矩阵，证明满足 $X^TAX=0$ 的 $n$ 维实向量的全体构成线性方程组 $AX=0$ 的解空间.

证明：若 $AX=0$，显然有 $X^TAX=0$

于是 $AX=0$ 的解 $X$ 满足方程 $X^TAX=0$.

反之，若 $X^TAX=0$，

因为 $A$ 是半正定矩阵，则∃实矩阵 $B$ 使得 $A=B^TB$

从而　$XX^TAX=X^T(B^TB)X=(B^TX^T)(BX)=0$

那么就有 $BX=0$，于是 $B^TBX=0$

即 $AX=0$.

7. 设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 证明：线性方程组 $AX=b$ 相容当且仅当 $A'X=0$ 的解都是 $b'X=0$ 的解.

证明：设线性方程组 $AX=b$ 相容，则存在 $X_0$ 使 $AX_0=b$，

设 $X_1$ 是 $A'X=0$ 的任一解，则 $A'X=0$，

而 $bX_1=(AX_0)'X_1=X'_0A'X_1\cdot 0=0$，

即 $A'X=0$ 的解都是 $b'X=0$ 的解.

反之，设 $A'X=0$ 的解都是 $b'X=0$ 的解，

即 $A'X=0$ 与 $\begin{pmatrix}A'\\ b'\end{pmatrix}X=0$ 同解，从而 $A'$ 与 $\begin{pmatrix}A'\\ b'\end{pmatrix}$ 的秩相等，

即 $A$ 与 $(A,b)$ 的秩相等，

从而线性方程组 $AX=b$ 相容.

8. 平面上三条不同的直线 $ax+by+c=0$，$bx+cy+a=0$，$cx+ay+b=0$，请证明这三条直线交于一点的充要条件为 $a+b+c=0$.

**证明：** $\begin{cases}ax+by=-c\\ cx+ay=-b\\ bx+cy=-a\end{cases}$　$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\\ b & c\end{pmatrix}$　$\overline{A}=\begin{bmatrix}a & b & -c\\ c & a & -b\\ b & c & -a\end{bmatrix}$

$$|\overline{A}| = \begin{vmatrix} a & b & -c \\ c & a & -b \\ b & c & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & -(a+b+c) \\ c & a & -b \\ b & c & -a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ c & a & -b \\ b & c & -a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a-c & c-b \\ 0 & c-b & b-a \end{vmatrix}$$

$= (a+b+c)(-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca)$

"$\Leftarrow$"

当 $a+b+c=0$ 时，$|\overline{A}|=0$，

又因三条直线各不相同，故

$r(A)=r(\overline{A})=2$

所以方程组有唯一解，即三条直线交于一点.

"$\Rightarrow$"若三条直线交于一点，则 $r(A)=r(\overline{A})=2$，从而

$|\overline{A}|=(a+b+c)(-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca)=0$，

又因三条直线互不相同，故 $-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca\neq 0$，

则由 $|\overline{A}|=0$ 得 $a+b+c=0$ .

注：已知平面上三条不同直线的方程分别为

$l_1: ax+2by+3c=0$

$l_2: bx+2cy+3a=0$

$l_3: cx+2ay+3b=0$

试证明这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$

9. 设 $\beta$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个解，$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{n-r}$ 是其导出值的一个基础解系，求证

(1) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha\, n-r,\beta$ 线性无关；

(2) $\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots\beta+\alpha_{n-r},\beta$ 线性无关.

**证明**：(1) 假设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{n-r},\beta$ 线性相关，

又因 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{n-r}$ 线性无关，

从而 $\beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{n-r}$ 线性表出，则 $\beta$ 是导出组 $AX=0$ 的解，

这与 $\beta$ 为 $AX=b$ 的解矛盾.

因此 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{n-r},\beta$ 线性无关.

(2) 令 $x_1(\beta+\alpha_1)+x_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+x_{n-r}(\beta+\alpha_{n-r})+x_n\beta=0$

整理为 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{n-r}\alpha_{n-r}+(x_1+x_2+\cdots+x_n)\beta=0$

因为 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{n-r},\beta$ 线性无关，

故 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-r}=x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，

于是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-r}=x_n=0$，

即 $\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots\beta+\alpha_{n-r},\beta$ 线性无关.

10. 设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 是线性方程组 $Ax=b(b\neq 0)$ 的任意 $t$ 个解，

证明：

(1) 若 $k_1r_1+k_2r_2+\cdots+k_tr_t=0$，则 $\sum_{i=1}^{t}k_i=0$

(2) $k_1r_1+k_2r_2+\cdots+k_tr_t$ 是 $AX=b$ 的解的充要条件为 $\sum_{i=1}^{t}k_i=1$.

证明:(1) $k_1r_1+k_2r_2+\cdots+k_tr_t=0$,则

$A(k_1r_1+k_2r_2+\cdots+k_tr_t)=0$

即　$k_1Ar_1+\quad+\cdots+k_tAr_t=0$,

又因　$A\gamma_i=b(b\neq0$,且 $i=1,2\cdots t)$,

故　$k_1b+k_2b+\cdots+k_tb=0$,

即　$k_1+k_2+\cdots+k_t=0$.

(2)"$\Rightarrow$"

因为 $k_1r_1+k_2r_2+\cdots+k_tr_t$ 是 $Ax=b$ 的解,

则有 $A(k_1r_1+k_2r_2+\cdots+k_tr_t)=b$,从而 $(\sum_{i=1}^{t}k_i)b=b$(因为 $Ar_i=b,i=1,2\cdots t$)

又 $b\neq0$,故有 $\sum_{i=1}^{t}k_i=1$

"$\Leftarrow$"

$A(k_1r_1+k_2r_2+\cdots+k_tr_t)=k_1Ar_1+k_2Ar_2+\cdots+k_tAr_t$

$=k_1b+k_2b+\cdots+k_tb=(k_1+k_2+\cdots+k_t)b$

因为 $k_1+k_2+\cdots+k_t=1$,故

$A(k_1r_1+k_2r_2+\cdots+k_tr_t)=b$,

从而 $k_1r_1+k_2r_2+\cdots+k_tr_t$ 是 $Ax=b$ 的解.

11. 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是数域 $P$ 上线性空间 $V$ 中一线性无关的向量组,讨论向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 的线性相关性.

**解**:令 $x_1(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+x_{n-1}(\alpha_{n-1}+\alpha_n)+x_n(\alpha_n+\alpha_1)=0$

整理得 $(x_1+x_n)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)\alpha_n=0$,

由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关,那么

$$\begin{cases} x_1+x_n=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \\ \quad\cdots \\ x_{n-1}+x_n=0 \end{cases}$$

以上方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{1+n}$$

当 $n$ 为奇数时,$D=2$,齐次方程组只有零解,$\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性无关;

当 $n$ 为偶数时,$D=0$,齐次线性方程组有非零解,$\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性相关.

注:已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$,

证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关.

12. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性无关，向量 $\beta_1$ 可用它们线性表示，向量 $\beta_2$ 不能用它们线性表示，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,\lambda\beta_1+\beta_2$（$\lambda$ 为常数）线性无关.

**证明：** 设有实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$ 使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k(\lambda\beta_1+\beta_2)=0$,

则 $k=0$，否则 $\lambda\beta_1+\beta_2=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{k}\alpha_m$ ①

因为 $\beta_1$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，故 $\exists\, l_1,l_2,\cdots,l_m$ 使

$\beta_1=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$ ②

由①、②得

$$\beta_2=\left(-\lambda l_1-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1+\left(-\lambda l_2-\frac{k_2}{k}\right)\alpha_2+\cdots+\left(-\lambda l_m-\frac{k_m}{k}\right)\alpha_m$$

这与 $\beta_2$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出矛盾，

于是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，

所以 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,

综合可得 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,\lambda\beta_1+\beta_2$ 线性无关.

注：常见题型为 $\lambda=1$

13. 设 $A\in P^{m\times n}$，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，$B=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})$，证明：如果 $AC=0$ 那么存在唯一的矩阵 $D$ 使 $C=BD$.（其中 $C\in P^{n\times t}$）.

**证明：** 存在性

令 $C=(C_1,C_2,\cdots,C_t)$,

$AC=A(C_1,C_2,\cdots,C_t)=(AC_1,AC_2,\cdots,AC_t)=(0,0,\cdots0)$ ,

于是 $AC_i=0\ (i=1,2\cdots t)$，而 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是 $AX=0$ 的基础解系，那么 $C_i$ 可以由 $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_{n-r}$线性表出，令

$$C_i=d_{1i}\eta_1+d_{2i}\eta_2+\cdots+d_{n-r,i}\eta_{n-r}=(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})\begin{pmatrix} d_{1i}\\ \cdots\\ d_{n-r,i}\end{pmatrix}$$

从而

$$C=(C_1,C_2,\cdots,C_t)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1t}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2,t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ d_{n-r,1} & d_{n-r,2} & \cdots & d_{n-r,t}\end{pmatrix}=BD$$

唯一性

假设还有 $D\in P^{(n-r)\times t}$，使 $C=BD$，又 $C=BD$

则 $BD=BD$，即 $B(D_1-D)=0$.

$D_1-D$ 的列向量是以 $B$ 为系数矩阵的齐次线性方程组 $BX=0$ 的解，

而 $B$ 是列满秩，于是 $BX=0$ 只有零解，即

$D_1-D=0$,

从而　$D_1 = D$.

14. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$ 中 $\alpha_m\neq 0$，证明：对于任意的 $\beta_i=\alpha_i+k_i\alpha_m k_{m-1}$，向量组 $\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_m,\beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_m,\cdots,\beta_{m-1}=l_{m-1}+k_{m-1}\alpha_m$ 线性无关的充要

条件为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

证明："$\Rightarrow$"

对任意的 $\beta_i=\alpha_i+k_i\alpha_m k_{m-1}$，$\beta_1,k_{m-1},\cdots\beta_{m-1}$线性无关，

则当取 $k_1=k_2=\cdots=\beta_{m-1}=0$ 时，得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则 $\alpha_m$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，

即存在 $C_1,C_2,\cdots,n\times(n-m)$，使 $\alpha_m=\sum\limits_{i=1}^{m-1}C_i\alpha_i$，

由于 $\alpha_m\alpha 0$，所以 $C_1,C_2,\cdots,C_{m-1}$不全为零，

不妨设 $C_1\neq 0$，则当取 $k_1=-\dfrac{1}{C_1},k_2=\cdots=k_{m-1}=0$ 时，

$$\beta_1=-\frac{1}{C_1}(C_2\alpha_2+C_3\alpha_3+\cdots+C_{m-1}\alpha_{m-1}),\ \beta_2=\alpha_2,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}.$$

从而 $\beta_1,k_{m-1},\cdots\beta_{m-1}$线性相关矛盾，

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

"$\Leftarrow$"

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，设 $l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{m-1}\beta_{m-1}=0$，

代入 $\beta_i=\alpha_i+k_i\alpha_m$，有

$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{m-1}\alpha_{m-1}+(l_1k_1+l_2k_2+\cdots+l_{m-1}k_{m-1})\alpha_m=0$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，

所以　$l_1=l_2=\cdots=l_{m-1}=l_1k_1+l_2k_2+\cdots+l_{m-1}k_{m-1}=0$

即 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{m-1}$线性无关。

15. 设 $m\times n$ 阶矩阵 $A$ 的秩为 $m$，$n\times(n-m)$ 阶矩阵 $B$ 的秩为 $n-m$，又 $AB=0$，$\alpha$ 是满足 $A\alpha=0$ 的一个 $n$ 维向量，证明存在唯一的一个 $n-m$ 维列向量 $\beta$，使 $\alpha=B\beta$.

证明：令 $B=(B_1,B_2,\cdots B_{n-m})$

由 $AB=0$ 知，$B_1,B_2,\cdots B_{n-m}$是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解

又 $r(B)=n-m$ 则 $B_1,B_2,\cdots B_{n-m}$线性无关，

再由 $r(A)=m$，知 $B_1,B_2,\cdots B_{n-m}$是 $AX=0$ 的一个基础解系，

是 $AX=0$ 的解，那么

$\alpha=x_1B_1+x_2B_2+\cdots+x_{n-m}B_{n-m}$

即　$\alpha=(B_1,B_2,\cdots B_{n-m})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_{n-m}\end{pmatrix}$

取 $\beta=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_{n-m}\end{pmatrix}$，则 $\beta$ 即为满足 $\alpha=B\beta$ 的 $n-m$ 维列向量.

（唯一性）若存在 $\gamma$，使 $\alpha = B\gamma, \gamma = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-m} \end{pmatrix}$

由 $\alpha = B\beta, \alpha = B\gamma$，得　$B(\beta - r) = 0$

从而

$(x_1 - y_1)B_1 + (x_2 - y_2)B_2 + \cdots + (x_{n-m} - y_{n-m})B_{n-m} = 0$

由 $B_1, B_2, \cdots B_{n-m}$ 线性无关，知

$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \cdots = x_{n-m} - y_{n-m} = 0$，

于是 $\gamma = \beta$.

16. 设 $A$ 是 $m \times n$ 矩阵，$b = (b_1, b_2, \cdots b_m)^T$ 是 $m$ 维列向量，证明下述命题相互等价：

(1) 线性方程组 $Ax = b$ 有解；

(2) 齐次方程组 $A^Tx = 0$ 的任一解 $(x_1, x_2, \cdots x_m)^T$ 必满足 $x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots + x_mb_m = 0$

(3) 线性方程组 $\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解，其中 0 是 $n$ 维列向量.

**证明**：(1)⇒(2) 即为 7 题.

$Ax = b$ 有解，则设 $x_0$ 为其一个解，即有 $Ax_0 = b$，

从而 $x_0^TA^T = b^T$.

令 $X_1 = (x_1, x_2, \cdots x_m)^T$ 为 $A^Tx = 0$ 的任一解，就有 $A^Tx_1 = 0$　　①

由 $x_0^TA^T = b^T$ 得 $x_0^TA^Tx_1 = b^Tx_1$，

再由①有 $b^Tx_1 = x_0^T(A^Tx_1) = 0$，

即 $x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots + x_mb_m = 0$.

(2)⇒(3)

$\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 可以表示为 $\begin{cases} A^Tx = 0 \\ b^Tx = 1 \end{cases}$，

而由(2)知 $A^Tx = 0$ 的任一解必满足 $b^Tx = 0$，

因此以上线性方程组无解.

(3)⇒(1)

线性方程组 $\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解，则

$r\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix}$，

亦即　$r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} + 1$

而　$r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = r(A^T) + 1$

于是　$r\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} = (r(A^T))$，

即　$r(A)=r(A,b)$

所以线性方程组 $Ax=b$ 有解.

(3)⇒(1)的等价命题(证明:线性方程组 $Ax=b$ 无解当且仅当存在向量 $C$,使 $C'A=0,C'b=1$).

17. 证明 $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0 \\ \cdots \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=0 \end{cases}$ 只有零解.

证明:(对 $n$ 用数学归纳法)

1. 当 $n=1$ 时,结论成立

2. 假设结论对 $<n$ 的情况成立,下面看 $n$ 的情形:

假设齐次方程组的解 $x_1,x_2\cdots x_n$ 都不为零,$x_1,x_2\cdots x_n$ 中两两互异的全体为 $x_{i1},\cdots,x_{it}$,且它们的重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_t$,

显然 $k_1+k_2+\cdots+k_t=n$

因此所给方程组可写为

$$\begin{cases} k_1x_{i1}+k_2x_{i2}+\cdots+k_tx_{it}=0 \\ k_1x_{i1}^2+k_2x_{i2}^2+\cdots+k_tx_{it}^2=0 \\ \cdots \\ k_1x_{i1}^n+k_2x_{i2}^n+\cdots+k_tx_{it}^n=0 \end{cases}$$

将其视为 $t$ 个未知量 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 的齐次线性方程组,它前 $t$ 个方程组成的方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{it} \\ x_{i1}^2 & x_{i2}^2 & \cdots & x_{it}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1}^t & x_{i2}^t & \cdots & x_{it}^t \end{vmatrix} = x_{i1}x_{i2}\cdots x_{it}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{it} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1}^{t-1} & x_{i2}^{t-1} & \cdots & x_{it}^{t-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

由克莱姆法则,前 $t$ 个方程组成的方程组只有零解,

即 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$,这显然矛盾

所以在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中必有一个为 0.

不妨设 $x_n=0$,于是所给方程组变为

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}=0 \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2=0 \\ \cdots \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{n-1}^n=0 \end{cases}$$

考虑它前 $n-1$ 个方程组成的方程组,由归纳假设有 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}$,

即所给方程组只有零解.

18. 设 $f(x),g(x)$ 是域 $F$ 上的多项式且 $(f(x),g(x))=1$ $M$ 为 $F$ 上的 $n$ 阶矩阵,$A=f(M)$,$B=g(M)$,证明:方程组 $ABX=0$ 的任意解可表成 $AX=0$ 的解与 $BX=0$ 解的和的形式.

证明:因 $(f(x),g(x))=1$ ,故存在 $u(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

于是 $u(M)f(M)+v(M)g(M)=\mathrm{I}$,即

$u(M)A+v(M)B=\mathrm{I}$ 且

$AB=BA$,$A$,$B$ 与 $M$ 的任一多项式可换,其中 $I$ 表示单位矩阵.

令 $x_0$ 为 $ABX=0$ 的解,则由以上等式知,$X_0=u(M)AX_0+v(M)BX_0$,再令 $\varepsilon=u(M)AX_0$,$\eta=v(M)BX_0$,则可验证 $\eta$ 和 $\varepsilon$ 分别是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的解。

19. 设 $n$ 阶实矩阵 $A$,$B$,$C$,满足 $CAA'=BAA'$,证明:$CA=BA$

**证明:**前面已证明 $A'X=0$ 与 $AA'X=0$ 同解,即 $YA=0$ 与 $YAA'=0$ 同解.

由 $CAA'=BAA'$,有 $(C-B)\cdot AA'=0$,故

$C-B$ 的行向量也是 $YA=0$ 的解,

于是

$(C-B)A=0$ 即 $CA=BA$.

20. 设 $A$,$B$,$C$ 是三个 $n$ 阶方阵,证明:若 $r(A)=r(BA)$,则 $r(AC)=r(BAC)$.

证 因为 $r(A)=r(BA)$,故方程组 $(BA)X=0$ 与 $AX=0$ 同解,

显然方程组 $(AC)X=0$ 的解是 $(BAC)X=0$ 的解. 反之,

若 $X$ 是 $(BAC)X=0$ 的解. 令 $CX=X_1$,则 $(BA)X_1=0$,故

$X_1$ 也是方程组 $AX=0$ 的解,即 $AX_1=0$,也就是 $(AC)X=0$,

所以 $(BAC)X=0$ 与 $(AC)X=0$ 同解,

从而 $r(AC)=r(BAC)$.

21. 若存在正整数 $k>n$ 使 $n$ 阶方阵 $A$ 有 $A^k=0$,证明 $A^n=0$.

证 我们证明对任意的 $m\geqslant n$ 有 $r(A^n)=r(A^m)$. 因为 $A^k=0$,显然 $0\leqslant r(A^{n+1})\leqslant r(A^n)\leqslant\cdots\leqslant r(A)\leqslant n-1$,$n+1$ 个矩阵的秩取值在 $[0,n-1]$ 中,

故必有 $k'$,$1\leqslant k'\leqslant n$,使 $r(A^{k'})=r(A^{k'+1})$,因而

方程组 $A^{k'}X=0$ 与 $A^{k'+1}X=0$ 同解,于是

$A^{k'+1}X=0$ 与 $A^{k'+2}X=0$ 同解,

依次类推我们有,

$r(A^{k'})=r(A^{k'+1})=r(A^{k'+2})=\cdots=r(A^m)$ 所以 $r(A^n)=r(A^{n+1})=\cdots=r(A^m)=\cdots$,

从而 $r(A^n)=0$,即 $A^n=0$.

# 第四章　二次型与矩阵

## §1 二次型

1. 二次型：设 $P$ 是一个数域，一个系数在数域 $P$ 中的 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
&+a_{22}x_2^2+a_{21}x_2x_n+\cdots+a_{2n}x_2x_n \qquad (1)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji},i<j) \qquad (2)\\
&=X^TAX, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

称为数域 $P$ 上的一个 $n$ 元二次型.

其中，

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

为对称矩阵，是二次型的矩阵.

2. 线性替换：设 $x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n$ 是两组文字，系数在数域 $P$ 中的一组关系式

$$
\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n, \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases} \qquad (4)
$$

称为由 $x_1,\cdots,x_n$ 到 $y_1,\cdots,y_n$ 的一个线性替换.

如果系数行列式 $|c_{ij}|\neq 0$，那么线性替换(2)就称为非退化的. 非退化线性替换把二次型变成二次型.

令

$$
C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},
$$

于是线性替换(4)可以写成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

或者

$X = CY.$

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX, A = A'$是一个二次型,作非退化线性替换

$X = CY$

得到一个 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的二次型 $Y'BY$,则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX = (CY)'A(CY) = Y'C'ACY$$
$$= Y'(C'AC)Y = Y'BY.$$

矩阵 $C'AC$ 也是对称的,由此即得

$B = C'AC.$

这是前后两个二次型的矩阵的关系。

3. 合同:数域 $P$ 上两个 $n$ 阶矩阵 $A, B$ 称为合同的,如果有数域 $P$ 上可逆的 $n \times n$ 矩阵 $C$,使得

$B = C'AC.$

合同具有:1) 自反性 2) 对称性 3) 传递性

4. 正定(半正定)二次型:实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 如果对于任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0 (f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \geqslant 0)$.

注(1)二次型和它的矩阵是相互唯一决定的.

(2)在变换二次型时,总是要求所作的线性替换是非退化的.

**定理 1** 数域 $P$ 上任意一个二次型都可以经过非化线性替换变成平方和 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ 的形式,称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的标准形.

**定理 2** 在数域 $P$ 上,任意一个对称矩阵都合同于一对角矩阵.

**定理 3** 对于二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^TAx$,总有正交变换 $X = PY$ 将 $f$ 化为标准形

$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $f$ 的矩阵 $A$ 的特征值.

注 化标准型的三种方法:配方法、合同变换法、正交变换法.

**定理 4** 任一复数的对称矩阵 $A$ 合同于一个形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

的对角矩阵. 其中,1 的个数为 $A$ 的秩.

**推论** 两个复数对称矩阵合同的充要条件是它们的秩相等.

$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2,$

就称为实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的规范形. 显然规范形完全被 $r,p$ 这两个数所决定.

**定理5**　(惯性定理) 实二次型的标准形中系数为正的平方项的个数是唯一的,它等于正惯性指数,而系数为负的平方项的个数就等于负惯性指数.

任一实对称矩阵 $A$ 都合同于一个下述形式的对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中对角线上 1 的个数 $p$ 及 $-1$ 的个数 $r-p$($r$ 等于 $A$ 的秩)都是唯一确定的,分别称为 $A$ 的正、负惯性指数,它们的差 $2p-r$ 称为 $A$ 的符号差..

**定理6**　实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

是正定的当且仅当 $d_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

**定理7**　非退化实线性替换保持正定性不变.

**定理8**　实数域上二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定的$\Leftrightarrow$它的正惯性指数等于 $n$.

**定理9**　实数域上二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定的$\Leftrightarrow$其规范形为

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2.$$

## §2 二次型与矩阵

1. 正定矩阵:实对称矩阵 $A$ 称为正定的,如果二次型 $X'AX$ 正定.

2. 顺序主子式:

$$P_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}(i=1,2,\cdots,n)$$

称为矩阵 $A=(a_{ij})_{nn}$的顺序主子式.

**定理10**　两个二次型 $X'AX=X'BX$ 相等的充要条件是它们的矩阵相等.

**定理11**　实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X'AX$$

是正定的$\Leftrightarrow$矩阵 $A$ 的顺序主子式全大于零.

**推论**　正定矩阵的行列式大于零.

**定理12**　二次型 $X'AX$ 正定$\Leftrightarrow A$ 与单位矩阵 $E$ 合同.

**定理13**　二次型 $X'AX$ 正定$\Leftrightarrow\exists$可逆矩阵 $P$,使得 $A=P^TP$.

**定理14**　二次型 $X'AX$ 正定$\Leftrightarrow A$ 的特征值都大于零.

**定理15**　$A,B$ 是正定矩阵,则

1) $A+B,A^{-1}$也正定;

2) 当 $AB=BA$ 时,$AB$ 也正定;

3) 设 $A$ 是非奇异对称矩阵,则 $A^2$ 也是正定矩阵.

**定理 16** 对于实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$,其中 $A$ 是实对称的,下列条件等价:

1)$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是半正定的;

2)它的正惯性指数与秩相等;

3)有可逆实矩阵 $C$,使

$$C'AC=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

其中 $d_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$;

4)有实矩阵 $C$ 使

$A=C'C$.

5)$A$ 的所有主子式皆大于或等于零;

注在 5)中,仅有顺序主子式大于或等于零是不能保证半正定性的. 比如

$$f(x_1,x_2)=-x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

就是一个反例.

## 自测题

**一、填空题**(第小题 3 分,共 15 分)

1. 二次型$f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$的矩阵为________.

2. 实数域上 3 阶对称矩阵按合同关系可分为________类.

3. 两个 $n$ 元实二次型等价的充分必要条件是________________.

4. $A$ 正定$\Leftrightarrow$________________.

$\Leftrightarrow$________________.

$\Leftrightarrow$________________.

5. 某四元二次型有标准形 $2y_1^2-3y_2^2+y_3^2+4y_4^2$,则其典范形为________.

**二、判断说明题**(先判断正确与错误,再简述理由. 每小题 5 分,共 20 分)

1. $n$ 元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x'Ax$ 的符号差与秩有相同的奇偶性.

2. $n$ 阶实对称矩阵 $A$ 若满足$|A|>0$,则 $A$ 正定.

3. $A$ 为 $n$ 阶复对称矩阵,则 $A$ 与 $-A$ 合同.

4. 设 $A,B$ 分别是 $m,n$ 阶正定矩阵,则$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$也是正定矩阵.

**三、计算题**(每小题 15 分,共 45 分)

1. 用可逆线性替换将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 化为标准形. 写出所用的线性变换及变换矩阵,并求出$f$的正惯性指数与符号差.

2. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.矩阵$B=(kI+A)^2$其中$k$为实数,$I$为单位矩阵.求对角矩阵$\Lambda$,使$B$与$\Lambda$相似,并求$k$为何值时,$B$为正定矩阵.

3. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$通过正交变换化为标准形$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求$a$的值及所作的正交变换.

**四、证明题**(第小题10分,共20分)

1. $A$为实对称矩阵,$B$为对称正定矩阵,证明:存在可逆矩阵$T$,使$T'AT$为对角形,$T'BT=I$.

2. 设$A$为实对称矩阵,且$A^3-3A^2+5A-3I=O$

(1)求$A$的特征值;

(2)证明$A$为正定矩阵.

# 典例解析

1. 求实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=2\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_{n+1})$$

的正惯性指数,负惯性指数,符号差及秩.

**解**:$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\cdots+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2+(x_n-x_{n+1})^2\geqslant 0$

故$f$使半正定的,副惯性指数为零,从而$r(A)\leqslant n-1$($A$为二次型的矩阵)

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0&\cdots&0&-1\\-1&2&-1&\cdots&0&0\\0&-1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&-1\\-1&0&0&\cdots&-1&2\end{bmatrix}$$

$A$的前$n-1$行,前$n-1$列构成的$n-1$阶子式为$n$,即$r(A)\geqslant n-1$

所以可知$r(A)=n-1$

于是$f$的正惯性指数为$n-1$,符号差为$n-1$.

2. 设$n$阶实方阵如下,试求$b$的取值范围,使$A$为正定矩阵

$$A=\begin{bmatrix}b+8&3&3&\cdots&3\\3&b&1&\cdots&1\\3&1&b&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\3&1&1&\cdots&b\end{bmatrix}$$

**解**:考虑$A$的$k$阶顺序主子式$D_k$,$k=1,2,\cdots,n$

$$D_K = \begin{bmatrix} b+8 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & b & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1 & b & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b+8 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 3 & b & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 3 & 1 & b & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 3 & 1 & 1 & \cdots & b \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -3 & b-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b-1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & b-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-1 & 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -3 & b-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b-1 \end{bmatrix}$$

$=(b+k+6)(b-1)^{k-1}$

①$k$ 为奇数 $b>-7$ 且 $b$ 不为 1，$D_k>0$

②$k$ 为偶数，即 $b>1$ 或 $b<-k-1$

综合①②，当 $b>1$ 时 $A$ 为正定矩阵.

3. 求一个正交变换 $X=PY$，化二次型

$f=x_1^2-x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$

为标准形.

**解**：二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$，

特征多项式 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+7)(\lambda-2)^2$，

$A$ 的特征值 $\lambda_1=-7$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-7$ 时，解方程组 $(A+7E)x=0$，由

$$A+7E=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$，单位化即得 $p_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解方程组 $(A-2E)x=0$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$（$\xi_2,\xi_3$ 不正交）

将 $\xi_2,\xi_3$ 正交化，令 $\beta_2=\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$,

$$\beta_3=\xi_3-\frac{\beta_2^T\xi_3}{\beta_2^T\beta_2}\beta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$$

将 $\beta_2,\beta_3$ 单位化，令 $p_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$,

正交变换 $x=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}y$,

标准形　$f=-7y_1{}^2+2y_2{}^2+2y_3{}^2$.

4. 已知二次型 $f=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换化成了标准形 $f=y_2{}^2+4y_3{}^2$，求 $a,b$ 的值和正交矩阵 $P$.

解 $f$ 的矩阵 $A$ 及标准形的矩阵 $\Lambda$ 分别为

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{pmatrix}$$

由题设条件，有

$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$

由于 $A$ 相似于对角矩阵 $\Lambda$，故 $A$ 的特征值为

$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4.$

由特征值的性质(1)，有

$1+a+1=0+1+4$

则　$a=3$

将 $\lambda_1=0$ 代入特征方程 $det(A-\lambda E)=0$，得

$$\begin{vmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-(b-1)^2=0,$$

故　$b=1$.

于是　$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

对于特征值 $\lambda_1=0$，解方程组 $(A-0E)=0$，得基础解系

$\xi_1=(1,0,-1)^T$,

把 $\xi_1$ 单位化,得对应于 $\lambda_1=0$ 的单位特征向量

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T.$$

类似可解得对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的单位特征向量

$$p_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T;$$

对应于特征值 $\lambda_3=4$ 的单位特征向量

$$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T.$$

因此所求的正交矩阵为 $p=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$

将用正交变换化二次型 $f$ 为标准形的步骤归纳如下:

1)写出 $f$ 的矩阵 $A$;

2)出一个正交矩阵 $P$;

3)写出正交变换 $X=PY$;

4)写出标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$, $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是 $A$ 的特征值.

5. $A$ 为 $n$ 阶半正定矩阵,证明 $|A+E|>1$

证明:$A$ 为 $n$ 阶半正定矩阵,则的特征值都大于等于零

于是存在 $n$ 阶可逆矩阵 $T$ 使 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$

其中 $\lambda_i\geqslant0$ 而 $\neq0$,故 $\lambda_i$ 至少有一个大于 0,从而

$$|A+E|=|T(A+E)T|=\begin{vmatrix}\lambda_1+1 & & & \\ & \lambda_2+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$$

练习:$A$ 为 $n$ 阶半正定矩阵,证明 $|A+2E|\geqslant2^n$

6. $A,B$ 是正定矩阵,证明 $|A+B|>|A|+|B|$

证明:$A$ 是正定矩阵,则存在可逆矩阵,$P$ 使 $P^TAP=E$,$P^TBP$ 正定,从而存在正交矩阵 $U$ 使

$$UP^TAPU=E,UP^TBPU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$

令 $PU=Q$，则 $Q$ 可逆，且

$$|Q^T||A+B||Q|=|Q^TAQ+Q^TBQ|=\begin{bmatrix}1+\lambda_1&&&\\&1+\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&1+\lambda_n\end{bmatrix} \quad <1>$$

即 $|A+B|=\frac{1}{|Q|^2}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n)$　　$<2>$

由 $<1>$ 与 $<2>$ 可知 $|A+B|>|A|+|B|$

7. 设 $A$ 是半正定矩阵，$B$ 是正定矩阵，证明 $|A+B|>|B|$

证明：因为 $B$ 是正定矩阵，$A$ 是实对称矩阵，则存在可逆矩阵 $P$ 使 $P^TBP=E$ 且 $P^TAP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$ 其中 $\lambda_i\geqslant0$ 且不全为零

从而 $B=(P^T)^{-1}P^{-1}$，

$$A=(P^T)^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}$$

那么 $|A+B|=$

$$\left|(P^T)^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}+(P^T)^{-1}P^{-1}\right|$$

$$=\left||(P^T)^{-1}|\left[\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}+E\right]|P^{-1}|\right|$$

$$=|(P^T)^{-1}|\left|\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}+E\right||P^{-1}|$$

$$=|B|(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n)$$

由于其中 $\lambda_i$ 且 $\lambda_i\geqslant0$ 不全为零，从而 $|A+B|>|B|$

8. $A$ 为 $n$ 阶正实对称矩阵，$S$ 为实反对称矩阵，证明 $|A+S|>0$.

**证明**：先证明 $|A+S|\neq0$

假设 $|A+S|=0$，则齐次线性方程组 $(A+S)X=0$ 有非零解

令 $X_0$ 是一非零解,即$(A+S)X_0=0$ 则

$0=X_0^T(A+S)X_0=X_0^TAX_0+X_0^TSX_0$

$S$ 为实反对称矩阵,则 $X_0^TSX_0=0$ 从而

$X_0^TAX_0=0$ 这与 $A$ 为正定矩阵矛盾

故$|A+S|\neq 0$

作 $\lambda_i$ 上的连续函数$f(x)=|A+xS|$

$\forall x_0\in\mathbf{R}$,$x_0S$ 仍是实反对称矩阵,从而

$f(x_0)\neq 0$,$f(0)=|A|>0$

如果$f(1)=|A+S|<0$,则$\exists c\in(0\quad 1)$使$f(c)=0$ 这$\forall f(x_0)\neq 0$ 与矛盾

所以$f(1)=|A+S|>0$

9. $B$ 为 $n$ 阶可逆实反对称矩阵,证明:

(1)$|B|>0$

(2)$Q(x)=|\lambda E-B|$,证明对任意的实数 $b$,$Q(b)>0$

(3)$A$ 为 $n$ 阶实正定矩阵,则$|A+B|>0$

证明:(1),$B'=B$ 则$|B|=|-B|=(-1)^n|B|$

因 $B$ 可逆,则$|B|\neq 0$,从而$(-1)^n=1$,即 $n$ 为偶数,记 $n=2t$

又因 $B$ 为可逆实反对称矩阵,则其特征多项式 $Q(x)$的特征根为纯虚数

再 $Q(x)$是实系数多项式,从而特征根是成对的,不妨

令为 $\pm b_1i,\pm b_2i,\cdots,\pm b_ni$,其中 $bj\in\mathbf{R}$,且$|\lambda E-B|=0$,

于是对 $B$ 来说,存在可逆矩阵 $P$ 使得

$$P^{-1}BP=\begin{bmatrix} b_1i & & & \\ & b_2i & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_ni \end{bmatrix}$$

从而 $|B|=b_1^2b_2^2\cdots b_t^2>0$

(2)$Q(0)=|-B|=(-1)^n|B|=|B|>0$

显然对任意实 $c$,$Q(c)\neq 0$

假设$\exists c$ 使 $Q(c_0)<0$,而 $Q(x)$是 $\lambda$ 的 $n$ 次多项式是连续函数,

则$\exists a$ 使 $Q(a)=0$ 矛盾,故$\forall$ 实数 $b$,$Q(b)>0$

(3)见 8 题.

10. $A$,$B$ 都是正定的,证明:

(1)方程$|\lambda E-B|=0$ 的根都大于零.

(2)方程$|\lambda E-B|=0$ 的所有根等于 $1\Leftrightarrow A=B$.

证明:(1)$A$ 正定,则存在可逆矩阵 $C$,使 $C^TAC=E$

$B$ 正定,那么 $C^TBC$ 也正定(与正定矩阵合同的矩阵仍正定)

从而存在正交矩阵 $Q$ 使

$$Q^TC^TBCQ=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_i$ 为 $C^TBC$ 的特征值，$\lambda_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$

且 $Q^TC^TACQ=E$

令 $CQ=P$,则

$|P^T||\lambda E-B||P|=|P^T\lambda AP-P^TBP|$

$$=|\lambda E-P^TBP|=\begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-\lambda_n\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

由　$|P^T||\lambda E-B||P|=0$ ,得 $|\lambda A-B|=0$

而　$|\lambda A-E|=0$ ,也知　$|P^T||\lambda E-B||P|=0$

(即 $|\lambda A-B|=0$ 当且仅当 $|P^T||\lambda E-B||P|=0$)

从而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $|\lambda E-B|=0$ 的大于零的根.

(2)方程 $|\lambda E-B|=0$ 的所有根为 $1\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$

$\Leftrightarrow P^TAP=E,P^TBP=E\Leftrightarrow A=B$

11. $A$ 为 $m$ 阶半正定矩阵,$B$ 为 $m\times n$ 实距阵,证明 $B^TAB$ 为正定矩阵充要条件为 $B$ 的秩为 $n$

**证明:"⇒"**

$A,B^TAB$ 分别为 $m$ 阶,$n$ 阶正定矩阵

假设 $r(B)<n-1$,则齐次线性方程组 $BY=0$ 有非零解

不妨令 $Y_0=(y_1,y_2,\cdots,y_n)(Y_0\neq0)$满足 $BY_0=0$

考虑 $n$ 元二次型 $Y'(B'AB)Y$

$g(y_1,y_2,\cdots y_n)=Y_0^T(B^TAB)Y_0=(BY_0)'A(BY_0)=0$

这与 $B^TAB$ 为 $n$ 元正定矩阵矛盾

故 $r(B)=n-1$

"⇐"

对于 $\forall n$ 维非零列向量 $Y_0$

$g(Y_0)=Y_0^T(B^TAB)Y_0=(BY_0)^TA(BY_0)$

由 $r(B)=n,\forall Y_0\neq0$ 则 $X_0=BY_0\neq0$

因为 $A$ 正定,则 $g(Y_0)>0$ 从而 $B^TAB$ 正定

12. 设 $A$ 是 $n$ 阶实对称正定矩阵,求证:存在唯一的实对称正定矩阵 $B$,使得 $A=B^2$

证明:$A$ 为实对称正定矩阵,那么存在正交矩阵 $Q$ 使

$$Q^TAQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

其中，　$\lambda_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$

从而

$$A=Q\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}Q^T=Q\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}Q^TQ\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}Q^T=B^2$$

其中 $B=Q\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}Q^T$.

唯一性:假设还有实对称矩阵 $B_1$ 使 $A=B_1^2=B^2$

$B^2$ 是实对称矩阵,令 $B^2\xi=\lambda\xi,\xi\neq0$

那么$(\lambda E+B^2)\xi=0$,从而$(\sqrt{\lambda}E+B)(\sqrt{\lambda}E-B)\xi=0$

而$\sqrt{\lambda}E+B$ 是正定矩阵,于是$(\sqrt{\lambda}E-B)\xi=0,\xi\neq0$

这就是说,若 $\xi$ 是 $B^2$ 的属于特征值$\sqrt{\lambda}$的特征向量

那么是 $B$ 的属于特征值的特征向量

于是 $Q^TBQ=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}$,同理

$Q^TB_1Q=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}$

故 $B=B_1$,即唯一性成立.

13. $A,B$ 都是对称矩阵,且 $A$ 正定,则存在可逆矩阵 $P$ 使,$P^TAP=E,P^TBP$ 为对角矩阵

证明:$A$ 是正定矩阵,则存在可逆矩阵 $C$ 使得 $C^TAC=E$,

而 $B$ 是实对称矩阵,则 $C^TBC$ 仍为实对称矩阵,记为 $B_1$

对于 $B_1$ 存在正交矩阵 $Q$ 使 $Q^TB_1Q=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

即 $Q^TC^TBCQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$,$\lambda_i$ 为 $B_1$ 的特征值

而 $Q^TC^TACQ=E$

令 $P=CQ$,则 $P$ 可逆,且 $P^TAP=E,P^TBP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

注:$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $B_1$ 的特征值,未必是 $B$ 的特征值.

用二次型的语言描述此题,即为:

一个正定二次型和一个二次型可用同一个线性变换,将正定二次型化为规范解,而将另一个二次型化为标准型.

14. 证明

(1)若 $A$ 为可逆矩阵,则 $A^TA$ 是正定矩阵

(2)若 $A$ 为实对称正定矩阵,证明存在另一个非零实数 $S$ 使得矩阵 $I_n+SA$ 是正定矩阵.

证明:(1)令 $X$ 是实数域上的 $n$ 维非零列向量

由 $A$ 可逆，知 $AX\neq0$，所以

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'(AA^T)X=(A'X)'(A'X)>0$

所以 $A^TA$ 是正定矩阵

(2)令 $A$ 的 $n$ 个特征值为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$

如果 $\lambda_1\geqslant0$，令 $S=1$，则 $I_n+SA$ 是正定矩阵

如果 $\lambda_n\leqslant0$，令 $S=-1$，则 $I_n+SA$ 是正定矩阵

如果 $\lambda_1<0,\lambda_n>0$，令 $-\dfrac{1}{\lambda_1}>S>-\dfrac{1}{\lambda_n}$，则 $I_n+SA$ 是正定矩阵

注：$\lambda_1\geqslant0$，$A$ 是半正定矩阵，则 $|I_n+SA|>|I_n|$，从而 $I_n+SA$ 的各阶顺序主子式都大于 0.

15. 设 $A$ 是可逆实矩阵，证明 $A$ 可分解为一个正定矩阵与一个正交矩阵之积，且表示法是唯一的。

证法 1　$A$ 是实可逆矩阵，则 $A^TA=S^2$ 是正定矩阵（由上题）

令 $Q=AS^{-1}$ 则 $A=QS$

而 $QQ^T=AS^{-1}(S^{-1})^TA^T=A(S^{-1})^2A^T=A(A^TA)^{-1}A^T=AA^{-1}(A^T)^{-1}A^T=E$

故 $Q$ 为正交矩阵，$S$ 为正定矩阵，满足 $A=QS$

证法 2：证明 $AA'$ 是正定矩阵，因为 $(AA')'=AA'$，是对称矩阵，

对任意的 $X\neq0$，$X'AA'X=(A'X)'A'X=|A'X|^2\rangle0$，故 $AA'$ 是正定矩阵，

由上题知存在正定矩阵 $B$，使 $AA'=B^2$。

令 $T=B^{-1}A$，$T'=(B^{-1}A)'=A'B^{-1}$，$TT'=B^{-1}AA'B'^{-1}=B^{-1}B^2B'^{-1}=I$，显然 $A=BT$.

下证唯一性. 若存在正定阵 $B_1$ 和正交阵 $T_1$ 使 $A=B_1T_1$，则 $AA'=B_1T_1T'_1B'_1$ 由上题知 $B=B_1$，于是 $T_1=B_1^{-1}A=B^{-1}A=T$.

16. 设 $A$ 为 $n\times m$ 实矩阵，则 $A'A$，$AA'$ 都是半正定矩阵.

**证明**：$A'A$ 是实对称矩阵，$\forall X\in\mathbf{R}^n$ 令 $U=AX$，则 $U$ 是 $m$ 维实向量 $U=(u_1,u_2,\cdots,u_m)'$

$\because\quad X'(A'A)X=(X'A')(AX)=U'U=u_1^2+u_2^2+\cdots+u_m^2\geqslant0$

$\therefore\quad A'A$ 是半正定矩阵，同理可证 $AA'$ 是半正定矩阵.

17. 设 $A$ 是 $n$ 级正定矩阵，则 $k>0$ 时，$A^{-1}$，$kA$，$A^*$，$A^n$ 都是正定矩阵.

证明　由于 $A$ 正定，存在可逆矩阵 $C$，使 $C'AC=E$，

$\therefore C^{-1}A^{-1}(C')^{-1}=E$，从而 $A^{-1}$ 为正定矩阵.

$\forall0\neq X\in\mathbf{R}^n$，$X'AX>0$，$\therefore X'(kA)X>0(k>0)$

$\therefore kA$ 正定

又 $A$ 正定，$|A|>0$，$A^{-1}$ 正定，$A^*=|A|A^{-1}$ 正定.

$|A^k|=|A|^k\neq0$，$A^k$ 对称

当 $m=2k$ 时，$A^m=A^{2k}=(A^k)'EA^k$，从而 $A^m$ 正定.

当 $m=2k+1$ 时，$A^m=A^{2k+1}=(A^k)'A(A^k)$

所以 $A^m$ 与 $A$ 合同，因而 $A^m$ 正定.

18. 设 $A$ 是 $n$ 阶实对称矩阵，$b$ 为 $n$ 维实向量，证明 $A-bb^{-1}>0$ 的充要条件为 $A>0$ 及 $b^TA^{-1}b<1$，其中表示 $b$ 的转置

**证明**：“$\Leftarrow$”

因为 $A>0$ 及 $b^TA^{-1}b<1$

$$\begin{pmatrix} E_n & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -b^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-bb^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -b^TA^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 知式右端

$$= \begin{pmatrix} A-bb^T & 0 \\ 0 & 1-b^TA^{-1}b \end{pmatrix}$$

是正定的，从而$\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 1 \end{pmatrix}$正定，再由前半式知$\begin{pmatrix} A-bb^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$正定，于是 $A-bb^{-1}$ 正定

"⇒"

因为 $b^TA^{-1}b$ 正定，那么由前半式可知$\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 1 \end{pmatrix}$正定，从而 $A$ 是正定的

那么由后半式可知 $b^TA^{-1}b<1$

注：$A>0$，指 $A$ 为正定矩阵，同理 $A-bb^{-1}>0$，$b^TA^{-1}b<1$ 意指 $A-bb^T$，$1-b^TA^{-1}b$ 也为正定矩阵

此题思路：与正定矩阵合同的矩阵仍为正定矩阵。

19. $A$ 为 $n$ 阶正定矩阵，$B$ 为 $n$ 阶正实对称矩阵，证明 $AB$ 的特征值都是实数

**证明**：$A$ 正定，则∃正定矩阵 $G$ 使 $A=G2$，那么 $AB=G2B$

而 $G^{-1}(G^2B)G=GBG=G'BG$

因 $B$ 是实对称矩阵，则 $G'BG$ 也是实对称矩阵

从而 $AB=G2B$ 有相似于实对称矩阵

故 $AB$ 的特征值都是实数

注：$A,B$ 都为正定矩阵，结论更成立。

20. (1)证明正定实对称矩阵的主对角元素全为正数

(2)若 $A$ 及 $A-B^TAB$ 都是正定实对称矩阵，$\lambda$ 是 $B$ 的任一实特征值，证明 $|x|<1$

证明：(1)设 $A=(a_{ij})_{nxn}$为正定矩阵

令 $D=P(1,i)AP(1,i)$，由 $A$ 正定，知 $D$ 正定

那么 $D$ 的左上角元素为 $a_{ij}>0, i=1,2,\cdots,n$

(2)令 $B\xi=\lambda\xi, \lambda\in\mathbf{R}, \xi\neq0$，那么 $\xi^TB^T=\lambda\xi^T$

由 $A-B^TAB$ 正定，知

$\xi^T(A-B^TAB)\xi=\xi^TA\xi-\xi^TB^TAB\xi=\xi^TA\xi-\lambda^2\xi^TA\xi=(1-\lambda^2)\xi^TA\xi>0$

由 $A$ 正定知，于是 $\xi^TA\xi>0$，则 $1-\lambda^2>0$，从而 $|x|<1$.

21. 若 $n$ 阶方阵 $A$ 的顺序主子式不为零，证明存在可逆的下三角阵 $B$ 与可逆的上三角阵 $C$，使 $A=BC$。

**证明**：对 $A$ 的阶数 $n$ 用数字归纳法。

令 $A=(a_{ij})$，$n=1$，显然，设结论 $n-1$ 阶方阵成立，证明它对 $n$ 阶方阵也成立.

设

$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & X \\ Y & a_{nn} \end{pmatrix}，其中 X=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} \end{pmatrix}, Y=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn-1}).$$

由 $A$ 的顺序主子式不为零知 $|A_{n-1}|\neq0$ 且它的顺序主子式不为零，由归纳法 $A_{n-1}=B_1C_1$，其

中 $B_1,C_1$ 分别是可逆的下三角阵与可逆的上三角阵，而

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -YA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & X \\ Y & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{n-1} & X \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

其中 $b=a_{nn}-YA_{n-1}^{-1}X$，取行列式 $|A|=|A_{n-1}|\cdot b$，所以 $b\neq 0$，而

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & X \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1C_1 & X \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & B_1^{-1}X \\ 0 & b \end{pmatrix}。$$

于是

$$A=\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -YA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & B_1^{-1}X \\ 0 & B \end{pmatrix}=B\cdot C,$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -YA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ YA_{n-1}^{-1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是可逆下三角阵，而 $C=\begin{pmatrix} C_1 & B_1^{-1}X \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 是可逆的上三角阵.

22. 证明实二次型 $f(x)=X_0{}^TAX_0$ 在向量 $X$ 的模 $|(x)|=1$ 时的最大值，即为实对称矩阵 $A$ 的最大特征值.

**证明**：$A$ 是实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 $Q$ 使

$$Q_0^TAQ=Q_0^TAQ=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}，其中\ \lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n.$$

对二次型 $f(x)$ 作正交线性替换 $X=QY$，且令 $|(x)|=1$，即 $X^TX=1$

那么

$$f(x)=X^TAX=\frac{X^TAX}{X^TX}=\frac{Y^TQ^TAQY}{Y^TQ^TQY}=\frac{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2}{Y^TY}$$

$$=\frac{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}\leqslant\lambda_n$$

令 $Y_0^T=(0,\cdots,0,1)$，则存在 $X_0=QY_0$ 使 $f(x_0)=\dfrac{\lambda_ny_n^2}{y_n^2}=\lambda_n$

即结论成立.

23. 若 $A$ 是正定矩阵，则存在唯一的正定矩阵 $B$，使 $A=B^2$，且任意与 $A$ 可换的矩阵也与 $B$ 可换。

$$A_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},\quad 且\ \lambda_1>0,i=1,2,\cdots,n.$$

令

$$B_1=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix},$$

则 $B_1^2=A_1$，又 $A=TA_1T^{-1}=TB_1^2T^{-1}=(TB_1T^{-1})^2$，令 $TB_1T^{-1}=B$，则 $A=B^2$。

设 $X$ 是一个与 $A$ 可换的矩阵，则 $XA=AX$，即 $XTA_1T^{-1}=TA_1T^{-1}X$，于是 $T^{-1}XTA_1=A_1T^{-1}XT$，令 $X_1=T^{-1}XT$，则 $X_1$ 与 $A_1$ 可换，若 $X_1$ 与 $B_1$ 可换，即 $T^{-1}X_1T\cdot T^{-1}B_1T=T^{-1}B_1TT^{-1}X_1T$，则有 $XB=BX$，于是我们只要证明任意与 $B_1$ 可换的矩阵也与 $B_1$ 可换即可。不妨设

$$A_1=\begin{pmatrix}\lambda_1I_1&&&\\&\lambda_2I_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_sI_s\end{pmatrix},\text{ 则 }B_1=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}I_1&&&\\&\sqrt{\lambda_2}I_2&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_s}I_s\end{pmatrix},$$

设 $X_1$ 是任一与 $A_1$ 可换的矩阵且 $X_1=(X_{ij}),i=1,2,\cdots,s,j,=1,2,\cdots,s.$

$X_1A_1=A_1X_1$，即 $\lambda_iX_{ij}=X_{ij}\lambda_j$，于是 $(\lambda_i-\lambda_j)X_{ij}=0$，若 $\lambda_i\neq\lambda_j$，于是 $X_{ij}=0$，即

$$X_1=\begin{pmatrix}X_{11}&&&\\&X_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&X_{ss}\end{pmatrix}.$$

显然，$B_1X_1=X_1B_1$.

设 $D^2=A$，$D$ 是正定矩阵，故 $A$ 与 $D$ 可换，即 $D_1=T^{-1}DT$ 与 $A_1$ 可换，由此知

$$D_1=\begin{pmatrix}D_{11}&&&\\&D_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&D_{ss}\end{pmatrix},\text{且 }D_1^2=A_1.$$

因 $D$ 是对称矩阵，$D_1$ 也是对称矩阵，$D_{jj}$ 也是对称矩阵，故有正交矩阵 $T_1$ 使

$$T_j^{-1}D_{jj}T_j=\begin{pmatrix}r_{j1}&&&\\&r_{j2}&&\\&&\ddots&\\&&&r_{jp_j}\end{pmatrix},\ D_{jj}=T_j\begin{pmatrix}r_{j1}&&&\\&r_{j2}&&\\&&\ddots&\\&&&r_{jp_j}\end{pmatrix}T_j^{-1}$$

由于 $D_{jj}^2=\lambda_jI_j$，即 $\begin{pmatrix}r_{j1}^2&&&\\&r_{j2}^2&&\\&&\ddots&\\&&&r_{jp_j}^2\end{pmatrix}=\lambda_jI_j$，故 $r_{jk}^2=\lambda_j$，又 $r_{jk}>0$，$r_{jk}=\sqrt{\lambda_j}$，

$D_{jj}=\sqrt{\lambda_j}I_j$，$D_1=B_1$，故 $D=B$ 即 $A$ 的分解是唯一的.

# 第五章　线性空间与矩阵

## §1 线性空间

### 一、线性空间

常见到的线性空间:数域 $P$ 上一元多项式环构成的线性空间 $P[x]$;如果只考虑其中次数小于 $n$ 的多项式,再添上零多项式构成的线性空间 $P[x]_n$,此线性空间的常用基为 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$;数域 $P$ 的 $m\times n$ 矩阵构成的线性空间 $P^{m\times n}$,其常用基为 $E_{ij},i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$;数域 $P$ 的 $n$ 阶矩阵构成的线性空间 $P^{n\times n}$,其常用基为 $E_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$;$n$ 元数组构成的线性空间 $P^n$,其常用基为单位向量 $\varepsilon_i=(0,0,\cdots,1\cdots,0),i=1,2,\cdots,n$ 构成的.

注 一个集合是否构成线性空间与所规定的加法、数量乘法有关.

例如,$R^+$,按普通数的加法与乘法运算就不构成线性空间,但若规定加法与数乘运算为:

$a\oplus b=ab$
$k\circ a=a^k$ ,则构成线性空间.

1. 基:在 $n$ 维线性空间 $V$ 中,$n$ 个线性无关的向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 称为 $V$ 的一组基.

2. 向量的坐标:设 $\alpha$ 是 $V$ 中任一向量,于是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\alpha$ 线性相关,因此 $\alpha$ 可以被基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出:

$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$.

其中系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是被向量 $\alpha$ 和基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 唯一确定的,这组数就称为 $\alpha$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标,记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

3. 子空间: 如果线性空间 $V$ 的一个非空集合 $W$ 对于 $V$ 两种运算是封闭的,那么 $W$ 就是一个子空间,且 $\dim W\leqslant\dim V$.

4. 生成子空间:设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是线性空间 $V$ 中一组向量,这组向量所有可能的线性组合

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$

所成的子空间叫做由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 生成的子空间,记为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$.

5. 值域:设 $A$ 是线性空间 $V$ 的一个线性变换,$A$ 的全体像组成的集合称为 $A$ 的值域,用 $AV$ 表示,$AV=\{A\xi|\xi\in V\}$,$AV$ 的维数称为 $A$ 的秩.

6. 核:所有被 $A$ 变成零向量的向量组成的集合称为 $A$ 的核,用 $A^{-1}(0)$ 表示,

$A^{-1}=\{\xi|A\xi=0,\xi\in V\}$,$A^{-1}$ 的维数称为 $A$ 的零度.

7. 特征子空间 $V_{\lambda_0}$: $A$ 的属于 $\lambda_0$ 的全部特征向量再添上零向量所成的集合

$V_{\lambda_0}=\{\alpha|A\alpha=\lambda_0\alpha,\alpha\in V\}$

8. 不变子空间:设 $A$ 是数域 $P$ 上线性空间 $V$ 的线性变换,$W$ 是 $V$ 的一个子空间. 如果 $\forall\xi\in W$,有 $A\xi\in W$,就称 $W$ 是 $A$ 的不变子空间,简称 $A$ - 子空间.

注(1)$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$,$V_1+V_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$

且 $V_1+V_2$ 的基为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的极大线性无关组

(2)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $W$ 的一组基,就有 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$.

(3)线性变换的值域与核都是 $V$ 的子空间.

(4)$A$ - 子空间的和与交还是 $A$ - 子空间.

(5)$A$ 的属于特征值 $\lambda_0$ 的一个特征子空间 $V_{\lambda_0}$ 也是 $A$ 的一不变子空间.

(6)任一线性空间都是数乘变换的不变子空间.

(7)线性变换 $A$ 与 $B$ 可交换,则 $A$ 的核与值域是 $B$ 的不变子空间;$B$ 的核与值域是 $A$ 的不变子空间.

(8)线性变换 $A$ 与 $B$ 可交换,则 $A$ 的特征子空间 $V_\lambda=\{\alpha\in V|A\alpha=\lambda\alpha\}$ 也是 $B$ 的特征子空间,并且是 $B$ 不变子空间.

(9)若 $W$ 是线性变换 $A$ 与 $B$ 的不变子空间,则它也 $A+B,AB$ 是的不变子空间;对任一多项式 $f(x)$,$W$ 也是 $f(A)$ 的不变子空间.

(10)$A$ 是对称变换,$V_t$ 是 $A$ - 子空间,则 $V_t^{-1}$ 也是 $A$ - 子空间.

**定理 1** 数域 $P$ 上线性空间 $V$ 的一个非空子集 $W$ 是 $V$ 的一个子空间 $\Leftrightarrow\forall a,b\in F,\alpha,\beta\in W$,都有 $a\alpha+b\beta\in W$.

**定理 2** 1)两个向量组生成相同子空间的充要条件是这两个向量组等价. 2)$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots;\alpha_r)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩.

**定理 3** 如果 $V_1,V_2$ 是线性空间 $V$ 的两个子空间,那么它们的交 $V_1\cap V_2$、和 $V_1+V_2$ 也是 $V$ 的子空间.

**定理 4** 设 $A$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的线性变换,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $V$ 的一组基,在这组基下 $A$ 的矩阵是 $A$,则

1) $A$ 的值域 $AV$ 是由基像组生成的子空间,即

$AV=L(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n)$

2) $A$ 的秩 $=A$ 的秩.

3)$AV$ 的一组基的原像及 $A^{-1}$ 的一组基合起来就是 $V$ 的一组基,且

$A$ 的秩 $+A$ 的零度 $=n$

推论 对于有限维线性空间的线性变换,它是单射的充要条件是它是满射.

注 子空间 $AV$ 与 $A^{-1}$ 的维数之和为 $n$,但是 $AV+A^{-1}$ 并不一定是整个空间,$AV+A^{-1}=V\Leftrightarrow AV\cap A^{-1}=\{0\}$.

**定理 5** 和 $V_1+V_2$ 是直和的充要条件是:

(1)$\alpha_1+\alpha_2=0,\alpha_i\in V_i(i=1,2)$ 只有在 $\alpha_i$ 全为零时才成立.

(2)$V_1\cap V_2=\{0\}$

(3)维$(W)=$维$(V_1)+$维$(V_2)$.

**定理 6** $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 $V$ 的一些子空间,下面这些条件是等价的:

1)$W=\sum V_i$ 是直和;

2)零向量的表法唯一;

3)$V_i\cap\sum\limits_{j\neq i}V_j=\{0\}(i=1,2,\cdots,s)$;

4)维$(W)=\sum$维$(V_i)$.

**定理 7** 设线性变换 $A$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$,它可分解成一次因式的乘积

$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$

则 $V$ 可分解成不变子空间的直和

$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$

**定理 8**　如果子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 两两正交,那么和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和.

**定理 9**　如果 $V_1$ 是 $V$ 的一个线性子空间,那么,$V_1$ 在同构映射 $\sigma$ 下的象集合

$\sigma(V_1)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V_1\}$

是 $\sigma(V)$ 的子空间,并且 $V_1$ 与 $\sigma(V_1)$ 维数相同.

**定理 10**　数域 $P$ 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数.

**二、欧氏空间**

1. 欧氏空间:设 $V$ 是实数域 $R$ 上一个向量空间,在 $V$ 上定义了一个二元实函数,称为内积,记作 $(\alpha,\beta)$,它具有以下性质:

1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

4) $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$,当且仅当 $\alpha=0$ 时,$(\alpha,\alpha)=0$

这里 $\alpha,\beta,\gamma$ 是 $V$ 任意的向量,$k$ 是任意实数,这样的线性空间 $V$.

2. 长度:非负实数 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 称为向量 $\alpha$ 的长度,记为 $|\alpha|$.

3. 夹角:非零向量 $\alpha,\beta$ 的夹角 $<\alpha,\beta>$ 规定为

4. 距离:长度 $|\alpha-\beta|$ 称为向量 $\alpha$ 和 $\beta$ 的距离,记为 $d(\alpha,\beta)$

距离的三条性质:

5. 正交:如果向量 $\alpha,\beta$ 的内积为零,即 $(\alpha,\beta)=0$,那么 $\alpha,\beta$ 称为正交或垂直,记为 $\alpha\perp\beta$.

6. 正交组:欧氏空间 $V$ 的一组非零的向量,如果它们两两正交.

7. 标准正交基:在 $n$ 维欧氏空间中,由 $n$ 个向量组成的正交组称为正交基;由单位向量组成的正交基称为标准正交基.

8. 正交变换:欧氏空间 $V$ 的线性变换 $A$ 如果保持向量的内积不变,即对任意的 $\alpha,\beta\in V$,都有 $(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$.

9. $V_1\perp V_2$:欧氏空间 $V$ 中两个子空间 $V_1,V_2$,如果对于任意的 $\alpha\in V_1,\beta\in V_2$,恒有 $(\alpha,\beta)=0$,则称 $V_1,V_2$ 为正交的.

10. 对称变换:$A$ 是实对称矩阵,欧氏空间 $V$ 的线性变换 $A$ 若对任意

$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$,有 $(A\alpha,\beta)=(\alpha,A\beta)$ 或 $\beta'(A\alpha)=\alpha' A\beta$.

柯西-布涅柯夫斯基不等式 即对于任意的向量 $\alpha,\beta$ 有

$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$

当且仅当 $\alpha,\beta$ 线性相关时,等式才成立.

三角形不等式

$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$.

勾股定理 当 $\alpha,\beta$ 正交时,

$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$.

推广 如果向量两 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交,那么

$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_m|^2$.

注:(1)对同一个线性空间可以引入不同的内积,使得它作成欧几里得空间.

(2)具有四条性质的二元实函数称为内积;反之,已知内积就必然具备四条性质.

(3)只有零向量才与自己正交;与任意向量正交的向量为零向量.

(4)由单个非零向量所成的向量组也是正交向量组.

(5)正交向量组是线性无关的. 因此,在 $n$ 维欧氏空间中,两两正交的非零向量不能超过 $n$ 个.

(6)在标准正交基下,向量的坐标可以通过内积表示,即

$\alpha=(\varepsilon_1,\alpha)\varepsilon_1+(\varepsilon_2,\alpha)\varepsilon_2+\cdots+(\varepsilon_n,\alpha)\varepsilon_n.$

(7)在标准正交基下,设

$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n.$

$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n.$

那么 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=X'Y.$

(8)如果 $V_1\perp V_2$,并且 $V_1+V_2=V$. 子空间 $V_1,V_2$ 互为正交补,每一个子空间的正交补唯一.

**定理 11** 对于 $n$ 维欧氏空间中任意一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,都可以找到一组标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$,使

$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),i=1,2,\cdots,n.$

注 $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),i=1,2,\cdots,n$ 就相当于由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵是上三角形的.

## §2 线性空间与矩阵

1. 过渡矩阵:设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 中两组基,它们的关系是

$$\begin{cases}\varepsilon'_1=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n,\\ \varepsilon'_2=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon'_n=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n.\end{cases}$$

即

$$(\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

称为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵,它是可逆的; 由基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的过渡矩阵即为 $A^{-1}$.

2. 度量矩阵:在 $n$ 维欧氏空间 $V$ 中取一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,对于 $V$ 中任意两个向量

$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n,$

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$
$$=X'AY,$$

其中

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

分别是$\alpha,\beta$的坐标,而矩阵$A=(a_{ij})_{nn}$称为基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的度量矩阵.

3. 正交矩阵：满足$A'A=E$的$n$阶实数矩阵$A$.

4. 酉矩阵:对$n$级复矩阵$A$,用$\overline{A}$表示以$A$的元素的共轭复数作元素的矩阵. 如$A$满足$\overline{A}'A=A\overline{A}'=E$.

5. 埃尔米特(Hermite)矩阵:如复矩阵$A$满足$\overline{A}'=A$.

注:(1)正交矩阵的逆矩阵仍为正交矩阵;正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵. 正交矩阵的行列式为1或$-1$.

(2)度量矩阵是正定矩阵,一组基为标准正交基的充要条件是它的度量矩阵为(3)对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵.

研究线性空间是通过基来研究的,一个线性空间的基有许多组,而基与基的之间的关系是通过矩阵来体现的,因此研究线性空间的性质仍然离不开基. 尤其由所有$n$阶方阵构成的线性空间更是如此：

我们知道,全体对称矩阵构成子空间,其常见基为$E_{ii},E_{ij}+E_{ji},i=1,2,\cdots,n,i<j$;

全体反对称矩阵构成一子空间,其常见基为$E_{ij}-E_{ji},i<j$.

**定理12** 设$A$是维欧氏空间的一个线性变换,于是下面四个命题是相互等价的:

1)$A$是正交变换;

2)$A$保持向量的长度不变,即对于$\alpha\in V,|A\alpha|=|\alpha|$;

3)如果$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是标准正交基,那么$A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n$也是标准正交基;

4)$A$在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

注:(1)正交变换的乘积与正交变换的逆变换还是正交变换.

(2)在标准正交基下,正交变换与正交矩阵对应

(3)正交变换的乘积与正交矩阵的逆矩阵也是正交矩阵.

(4)正交变换的行列式等于$+1$或$-1$. 行列式等于$+1$的正交矩阵通常称为旋转,或者称为第一类的;行列式等于$-1$的正交变换称为第二类的.

**定理13** 设向量$\xi$在两组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$下的坐标分别是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$,则

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

**定理14** 线性空间$P^{n\times n}$是全体对称矩阵构成的子空间⊕全体反对称矩阵构成的子空间.

**定理15** 设$A,B$分别是数域$P$上的$m$阶与$n$阶方阵,则矩阵方程$AX=XB$的解为$m\times n$矩

阵,并且此矩阵方程的全体解构成一个线性空间. 若 $A,B$ 的特征多项式互素,那么此线性空间为零空间,即方程组只有零解.

## 自测题

**一、填空题**(每小题4分,共20分)

1. $R^3$中下列子集(　　)不是$R^3$的子空间.

A. $w_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3 \mid x_2=1\}$

B. $w_2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3 \mid x_3=0\}$

C. $w_3=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3 \mid x_1=x_2=x_3\}$

D. $w_4=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3 \mid x_1=x_2-x_3\}$

2. $\sigma$ 为欧氏空间 $V$ 的线性变换,则 $\sigma$ 为正交变换当且仅当________________;$\sigma$ 为对称变换当且仅当________________.

3. 设 $\alpha_1=(0,-1,1)$,$\alpha_2=(2,1,-2)$,$\beta=k\alpha_1+\alpha_2$,若 $\beta$ 与 $\alpha_2$ 正交,则 $k=$________.

4. $A,B$ 为 $n$ 阶正交矩阵,且 $|A|>0$,$|B|<0$,则 $|AB|=$________.

5. $\alpha,\beta,\gamma$ 是三维欧氏空间 $R^3$ 的向量,则式子 $(\alpha,\beta)\gamma$,$\left(\frac{\alpha}{|\alpha|},\frac{\beta}{|\beta|}\right)$,$(\gamma,(\alpha-\beta))$ 中表示向量的是________.

**二、判断说明题**(先判断正确与错误,再简述理由,每小题4分,共20分)

1. $W=\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_i\in\mathbf{R}$ 且 $a_3=a_1,a_2=-a_0\}$ 的维数等于2.

2. $F$ 上向量空间 $V$ 若含有一个非零向量,则它必含有无穷多个向量.

3. 欧氏空间 $V$ 中保持任两个非零向量的夹角不变的线性变换必为正交变换.

4. 实数与对称变换之积必是对称变换.

5. 欧氏空间 $R^2$ 中,$\sigma(x,y)=(2x+y,x-2y)$ 为对称为变换.

**三、计算题**(每小题8分,共32分)

1. 已知 $\alpha$ 关于基 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 的坐标为 $(1,0,2)$,由基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 到基 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}3&2&4\\1&0&0\\2&1&0\end{pmatrix}$,求 $\alpha$ 关于基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的坐标.

2. 已知 $W_1=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbf{R}\right\}$,$W_2=\left\{\begin{pmatrix}a_1&0\\c_1&0\end{pmatrix} \middle| a_1,c_1\in\mathbf{R}\right\}$,是 $M_2(R)$ 的两个子空间,求 $W_1\cap W_2$,$W_1+W_2$ 的一个基和维数.

3. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0\\x_1+x_2-3x_3+x_5=0\end{cases}$$

的解空间的一组标准正交基.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$

求正交矩阵 $U$,使 $U'AU$ 为对角形.

**五、证明题**(每小题 10 分,共 30 分)

1. 设 $A$ 是任一 $m\times n$ 矩阵,将 $A$ 任意分块成 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_s\end{pmatrix}$,证明:$n$ 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间 $V$ 是齐线性方程组 $A_ix=0$ 的解空间 $V_i$ 的交,$i=1,2,\cdots,s$.

2. $A$ 为 $n$ 阶实对称矩阵,且 $A^2=I$. 证明:存在正交矩阵 $U$,使

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}I_r & 0\\0 & -I_{n-r}\end{pmatrix}$$

其中 $r$ 为 $A$ 的正特征值的个数.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的一组基. 证明:这组基是标准正交基的充分必要条件是,对 $V$ 中任意向量 $\alpha$ 都有

$$\alpha=(\alpha,\alpha_1)\alpha_1+(\alpha,\alpha_2)\alpha_2+\cdots+(\alpha,\alpha_n)\alpha_n.$$

## 典型例题解析

1. 设 $P$ 是数域,$m<nA\in p^{m\times n},B\in p^{(n-m)\times m}V_1$ 和 $V_2$ 分别是齐次线性方程 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的解空间,证明 $P^n=V_1\oplus V_2$ 的充要条件是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 只有零解

**证明:**"$\Rightarrow$"

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\in p^{n\times n}\quad P^n=V_1\oplus V_2$

假定 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 有非零解,则 $A\xi=0,B\xi=0$

于是 $\xi\in V_1\cap V_2$ 与 $P^n=V_1\oplus V_2$ 矛盾

从而结论成立

"$\Leftarrow$"

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 只有零解,则

$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=n,r(A)=m,r(B)=n-m$

于是 $\dim V_1=n-m,\dim V_2=m,\dim V_1+\dim V_2=n$

令 $\xi\in V_1\cap V_2$,则 $A\xi=0,B\xi=0$,那么

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xi=0$ 则 $\xi=0$,亦即 $V_1\cap V_2=\{0\}$

故 $P^n=V_1\oplus V_2$

2. 设 $A$ 为数域 $P$ 上 $n$ 阶可逆矩阵，任意将 $A$ 分为两个子块 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$ 证明 $n$ 阶线性空间 $P^n$ 是齐次线性方程组 $A_1x=0$ 的解空间 $V_1$ 与 $A_2x=0$ 的解空间 $V_2$ 的直和

**证明**：因为 $A$ 可逆，故令 $r(A_1)=t$ 则 $r(A_2)=t$

于是 $\dim V_1=n-t, \dim V_2=t_2$

又 $\forall \xi \in V_1 \cap V_2$ 则 $A_1\xi=0, A_2\xi=0$

那么 $\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\xi=0$

由 $A$ 可逆，得 $\xi=0$

即 $P^n=V_1 \oplus V_2$

3. 设 $M \in p^{n\times n}$，$f(x), g(x) \in p[x]$ 且 $(f(x), g(x))=1$ 令 $A=f(M), B=g(M), W, W_1, W_2$，分别为线性方程组 $ABX=0$，$AX=0$，$BX=0$ 的解空间，证明 $W=W_1 \oplus W_2$

**证明**：$A=f(M), B=g(M)$ 则 $AB=BA$

显然 $W_1, W_2$ 是 $W$ 的子空间，那么 $W_1+W_2$ 也是 $W$ 的子空间

令 $\dim W_1=s, \dim W_2=t$，则

$r(A)=n-s, r(B)=n-t$

由 $(f(x), g(x))=1$，那么 $\exists u(x), v(x) \in p[x]$ 使

$u(x)f(x)+g(x)v(x)=1$

$$u(M)f(M)+g(M)v(M)=E \tag{1}$$

令 $\xi \in V_1 \cap V_2$，则 $A\xi=0, B\xi=0$

用 $\xi$ 右乘(1)式两边，有

$u(M)f(M)\xi+g(M)v(M)\xi=E\xi=0$

从而 $\xi=0$，于是 $W_1 \cap W_2=\{0\}$，$W_1+W_2$ 是直和

$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2=s+t$

$r(AB) \geqslant r(A)+r(B)-n=n-(s+t)$

于是 $\dim W \leqslant s+t$

而 $W_1+W_2$ 是 $W$ 的 $S+T$ 维子空间

故 $W=W_1 \oplus W_2$

4. 设 $A, B, C, D$ 都是数域 $P$ 上 $n$ 阶方阵，且关于乘法两两互换，还满足 $AC+BD=E$（$E$ 为 $n$ 阶单位阵），设方程 $ABX=0$ 的解空间 $W$，$BX=0$ 与 $AX=0$ 的解空间分别为 $V_1$ 和 $V_2$，证明 $W=V_1 \oplus V_2$

**证明**：由 $AB=BA$，则 $BX=0$ 与 $AX=0$ 的解都是 $ABX=0$ 的解

从而 $V_1, V_2$ 是 $W$ 的子空间

$\forall \alpha \in W, \alpha=E\alpha=(AC+BD)\alpha=AC\alpha+BD\alpha$

那么 $\begin{matrix}B(AC\alpha)=C(AB)\alpha=0\\A(BD\alpha)=D(AB)\alpha=0\end{matrix}$

于是 $AC\alpha \in V_1, BD\alpha \in V_2$，从而 $W=V_1+V_2$

又 $\forall \alpha \in V_1 \cap V_2$，则 $A\alpha=0, B\alpha=0$

由 $AC+BD=E$，则 $\alpha=AC\alpha+BD\alpha=0$

于是 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

所以 $W = V_1 \oplus V_2$

5. 设 $F$ 为数域, $A$ 为数域 $F$ 上 $n$ 阶矩阵, 且

$V_1 = \{x \in F^n \mid Ax = 0\}$, $V_2 = \{x \in F^n \mid (A - E)x = 0\}$

求证: $A^2 = A \Leftrightarrow F^n = V_1 \oplus V_2$

**证明:** "$\Rightarrow$"

由 $A^2 = A \Rightarrow r(A) + r(A + E) = n$(需证明)

令 $r(A) = t$ 则 $r(A + E) = n - t$

$\dim V_1 = n - t, \dim V_2 = t$

从而 $\dim V_1 + \dim V_2 = n$

又 $\forall \xi \in V_1 \cap V_2$, 则 $A\xi = 0, (A + E)\xi = 0$, 则

$\xi = A\xi = 0$

于是 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 从而

$F^n = V_1 \oplus V_2$

"$\Leftarrow$"

如果 $F^n = V_1 \oplus V_2$, 令 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与

$\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \cdots, \beta_n$ 分别 $V_1, V_2$ 是一组基则

$A\alpha_i = 0, i = 1, 2, \cdots, r, (A - E)\beta_j = 0, j = r + 1, \cdots, n$

令 $T = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \cdots, \beta_n)$, 则 $T$ 是可逆矩阵, 且

$AT = A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \cdots, \beta_n)$

$= (0, \cdots, 0, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \cdots, \beta_n)$

$A^2T = A(0, \cdots, 0, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \cdots, \beta_n)$

$= (0, \cdots, 0, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \cdots, \beta_n)$

于是 $AT = A^2T$, 即 $A^2 = A$

6. 设 $W, W_1, W_2$ 是向量空间 $V$ 的子空间, $W_1 \subseteq W_2$, $W \cap W_1 = W_2 \cap W$, $W_1 + W = W_2 + W$,

证明 $W_1 = W_2$.

分析: 证明两个子空间相等, 用到的方法通常为证明双包含.

**证明:** $\forall \alpha_2 \in W_2$ 则 $\alpha_2 \in W_2 + W$, 又 $W_1 + W = W_2 + W$

从而有 $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha$, 其中 $\alpha_1 \in W_1, \alpha \in W$

又由 $W_1 \subseteq W_2$ 知 $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \in W_2 \cap W$

而 $W \cap W_1 = W_2 \cap W$

于是 $\alpha_2 - \alpha_1 \in W \cap W_1$, 即 $\alpha_2 - \alpha_1 \in W_1$

又 $\alpha_1 \in W_1$, $W_1$ 是 $V$ 的子空间, 则有 $\alpha_2 \in W_1$

这样, 由 $\alpha_2 \in W_2$ 得 $\alpha_2 \in W_1$, 从而知 $W_2 \subseteq W_1$

又由已知 $W_1 \subseteq W_2$

故 $W_1 = W_2$

7. 设 $A$ 为数域 $P$ 的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V$, $W = 2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 又有 $\beta_1, \beta_2 \in W$ 且线性无关. 求证: 可用 $\beta_1, \beta_2$ 替换 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中的两个向量 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}$, , 使得剩下的两个向量 $\alpha_{i3}, \alpha_{i4}$ 与 $\beta_1, \beta_2$ 仍然生成子空间 $W$, 也即 $W = 2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$

**证明:**(替换定理)

令 $\beta_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$ (1)

$\beta_2 = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4$ (2)

由 $\beta_1,\beta_2$ 线性无关,知一定存在 $i\neq j, a_i\neq 0, b_j\neq 0$,使(1)(2)成立

不妨令 $x_1\neq 0, y_2\neq 0$ 则

$$\alpha_1 = \frac{1}{x_1}(\beta_1 - x_2\alpha_2 - x_3\alpha_3 - x_4\alpha_4) \quad (3)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{y_2}(\beta_2 - y_1\alpha_1 - y_3\alpha_3 - y_4\alpha_4) \quad (4)$$

将(3)代入(4),则 $\alpha_2$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示

将(4)代入(3),则 $\alpha_1$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示

再由(1),(2)可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 等价

从而 $W=2(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

8. 以 $p^{2\times 2}$ 表示数域 $P$ 上的 2 阶矩阵的集合,假设 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 为两两互异的数,而且他们的和不等于零,试证明

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_1^2 & a_1^4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ a_2^2 & a_2^4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ a_3^2 & a_3^4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & a_4 \\ a_4^2 & a_4^4 \end{pmatrix}$$

是数域 $P$ 线性空间 $p^{2\times 2}$ 的一组基

**证明:**$\dim p^{2\times 2}=4, E_{11},E_{12},E_{13},E_{14}$ 为其一组基

$$(A_1,A_2,A_3,A_4) = (E_{11},E_{12},E_{13},E_{14})\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{pmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}, D$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \end{vmatrix}$$

$$D = \prod_{1\leq i\leq j\leq 5}(a_i - a_j) = (a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\prod_{1\leq i\leq j\leq 4}(a_i-a_j)$$

而 $d$ 是 $D$ 中的 $M_{45}=-A_{45}=a_5^3$ 的系数的相反数,为

$$+(a_1+a_2+a_3+a_4)\prod_{1\leq i\leq j\leq 4}(a_i-a_j)$$

由已知条件 $a_1,a_2,a_3,a_4$,两两互异,且 $a_1+a_2+a_3+a_4\neq 0$

故 $A_1,A_2,A_3,A_4$ 为 $p^{2\times 2}$ 的一组基

9. 以 $p^{3\times 3}$ 表示数域 $P$ 上的 3x3 阶矩阵组成的线性空间,求所有与 $A$ 可交换的矩阵 $B$ 组成的线性子空间 $W$ 的维数与一组基,其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}$$

**解:**$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}+E=A_1+E$

$AB=BA\Leftrightarrow A_1B=BA_1$

$$A_1B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1&c_2&c_3\\c_1&c_2&c_3\\2b_1+c_1&2b_2+c_2&2b_3+c_3\end{pmatrix}$$

$$BA_1=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2a_3&a_1+a_2+a_3\\0&2b_3&b_1+b_2+b_3\\0&2b_3&c_1+c_2+c_3\end{pmatrix}$$

由矩阵相等,得$\begin{cases}a=o\\2b_1+c_1\\c_2=2a_3=2b_3\\2b_2+c_2=2c_3\\c_3=a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3\\2b_3+c_3=c_1+c_2+c_3\end{cases}$

$$\begin{cases}a_1=b_1=0\\a_1=-a_2-\frac{1}{2}c_2+c_3\\\frac{1}{2}c_2=a_3=b_3\\b_2=-\frac{1}{2}c_2+c_3\end{cases}$$

分别令$(a_2,c_2,c_3)=(1,0,0),(0,2,0),(0,0,1)$得

$$B_1=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&2&0\end{pmatrix},B_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

那么$B_1,B_2,B_3$线性无关,是$W$的一组基

因此与$A$可交换的矩阵$B$组成的线性子空间$W$的维数为3

10. 设$P$是一数域,$A$是$p^{n\times n}$中一个矩阵,令$F(A)=\{f(A)\mid f(x)\in P[x]\}$

证明(1)$F(A)$是$p^{n\times n}$的一个线性子空间

(2)可以找到非负整数$m$使$E,A,A^2,\cdots,A^m$是$F(A)$一组基

(3)$F(A)$的维数等于$A$的最小多项式的次数

**证明:**(1)$A\in F(A),F(A)\neq\varphi$

$\forall f(x),g(x)\in p[x]$令$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$

不妨令,$n \geq m$,令 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$,则 $h(x)=f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$

$\forall f(A),g(A)\in F(A)$ 则 $h(A)=f(A)+g(A)\in F(A)$,$\forall k\in P,kf(A)\in F(A)$

于是 $F(A)$ 是 $p^{n\times n}$ 的一个子空间

(2)(3)令 $A$ 的最小多项式次数为 $S$,即

$m(x)=x^s+\cdots+a_1x+a_0$

$\forall f(x)\in p[x]$ 令 $f(x)=m(x)q(x)+r(x)$,$r(x)=0$ 则

$f(A)=m(A)q(A)+r(A)=b_{s-1}A^{s-1}+\cdots+b_1A+b_0E=r(A)$

令 $x_{s-1}A^{s-1}+\cdots+x_1A+x_0E$

则 $x_0=x_1=\cdots=x_{s-1}=0$,否则与 $m(x)$ 是 $A$ 的最小多项式矛盾

于是 $E,A,\cdots,A^{s-1}$,是 $F(A)$ 的一组基 $\dim F(A)=s$

11. 用 $M_n(k)$ 表示数域 $K$ 上所有 $n$ 阶矩阵组成的集合,他对于矩阵加法和数量乘法为 $K$ 上的线性空间,数域 $K$ 上 $n$ 阶矩阵 $A$ 称为循环矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

用 $U$ 表示 $K$ 上 $n$ 阶循环矩阵组成的集合,证明:$U$ 是 $M_n(k)$ 的一个子空间,并求 $U$ 的一个基和维数。

证明:$0\in U,U\neq\varphi$ 循环矩阵由第一行元素唯一确定

不妨记 $A=C[a_1,a_2,\cdots,a_n]$,令 $B=C[b_1,b_2,\cdots,b_n]$

则 $A+B=C[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]\in U$

$\forall a\in k,aA=C[aa_1,aa_2,\cdots,aa_n]\in U$

于是 $U$ 是 $M_n(k)$ 的一个子空间

令 $S=\begin{bmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,则 $S^k=\begin{bmatrix} 0 & E_{n-k} \\ E_k & 0 \end{bmatrix}$,$k=1,2,\cdots,n-1$

从而 $A=a_1E_n+a_2S+a_3S^2+\cdots+a_nS^{n-1}$

$\forall A\in U$ $A$ 可以由 $E_n,S,S^2,\cdots,S^{n-1}$ 线性表示

令 $a_1E_n+a_2S+a_3S^2+\cdots+a_nS^{n-1}=0$

即 $A=0$,则 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n=0$

于是 $E_n,S,S^2,\cdots S^{n-1}$ 线性无关

故 $E_n,S,S^2,\cdots S^{n-1}$ 是 $U$ 的一组基 $\dim U=n$

12. 设 $V$ 是数域 $F$ 上所有 $n$ 阶对称矩阵关于矩阵加法与数乘构成的线性空间,令

$U=\{A\in V|Tr(A)=0\}$,$W=\{\lambda E|\lambda\in F\}$

这里 $E$ 为单位矩阵,$0\in U,U\neq\varphi$ 为 $A$ 的对角元素之和

(1)求证 $U,W$ 为 $V$ 的子空间

(2)分别求 $U,W$ 的一组基和维数

(3)求证 $V=U\oplus W$

**证明:**(1)子空间(略)

(2) $W=\{\lambda E \mid \lambda \in F\}=L(E)E$ 是 $W$ 的基 $\dim W=1$

令 $E_{ij}$为 $i$ 行 $i$ 列交叉处元素为 1,其余元素为零的 $n$ 阶矩阵

$$E_{11}-E_{nn}, E_{22}-E_{nn}, \cdots, E_{n-1n-1}-E_{nn}, E_{ij}+E_{ji}, i \neq j ; i, j=1,2, \cdots, n \qquad ①$$

①是 $U$ 中的$\frac{1}{2}(n+n^{2}-2)$个向量,令

$$a_{11}(E_{11}-E_{nn})+\cdots+a_{n-1,n-1}(E_{n-1,n-1}-E_{bb})+\sum_{i=j} a_{ij}(E_{ij}-E_{ji})=0 \text{ 则}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & -(a_{11}+\cdots+a_{n-1n-1}) \end{bmatrix}=0$$

于是 $a_{n}=\cdots=a_{n-1n-1}=0, a_{ij}=0, i \neq j ; i, j=1,2, \cdots, n$

$E \in V, E \in U, \dim V=\frac{n(n+1)}{2}, \dim U=\frac{n^{2}+n-2}{2}$

因此向量组(1)线性无关

向量组①是 $U$ 的一组基

(3) $\forall A \in U \cap W$ 则 $A=\lambda E, Tr(A)=0$,从而 $n\lambda=0, \lambda=0$

则 $A=0, U \cap W=\{0\}$

又 $U+W$ 是 $V$ 的子空间且 $\dim U+\dim W=\dim V$

因此 $V=U \oplus W$

13. 设 $V$ 是实函数空间,$V_{1}$ 与 $V_{2}$ 是 $V$ 的子空间,其中 $V_{1}=L(1, x, \sin x)V_{2}=L(\cos 2x, \cos^{2} x)$

(1)求 $V_{1}$ 的一组基和维数

(2)求 $V_{2}$ 的一组基和维数

(3)求 $V_{1}+V_{2}$ 的一组基和维数

(4)求 $V_{1} \cap V_{2}$ 的一组基和维数

**解:**(1)令 $a_{1}1+a_{2}x+a_{3}\sin x=0$,其中 $a_{1}, a_{2}, a_{3} \in \mathbf{R}$,

此式对所有的 $x$ 都成立,于是令 $x=0, \pi, \frac{\pi}{2}$,有

$$\begin{cases} a_{1}=0 \\ a_{2}\pi=0 \\ a_{2}\frac{\pi}{2}+a_{3}=0 \end{cases} \quad a_{1}=a_{2}=a_{3}=0$$

因此 $1, x, \sin x$ 线性无关

故 $\dim V_{1}=3$

(2)令 $a_{1}\cos 2x+a_{2}\cos^{2} x=0 \quad a_{1}, a_{2} \in \mathbf{R}$

上式对所有实数 $x$ 都成立,分别令 $x=0, \frac{\pi}{2}$,有

$$\begin{cases} a_{1}+a_{2}=0 \\ -a_{1}=0 \end{cases}$$

那么 $a_{1}=a_{2}=0$,因此 $\cos 2x, \cos^{2} x$ 线性无关

故 $\dim V_{2}=2$

(3) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$V_1 + V_2 = L(1, x, \sin x) + L(\cos 2x, \cos^2 x)$

$= L(1, x, \sin x, \cos^2 x)$

令 $a_1 1 + a_2 x + a_3 \sin x + a_4 \cos^2 x = 0$

分别令 $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\pi$，可以得知 $1, x, \sin x, \cos^2 x$ 线性无关

故 $\dim(V_1 + V_2) = 4$

$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 1 e V_1 = 2\cos^2 x - \cos 2x \in V_2$

故 1 是 $V_1 \cap V_2$ 的基

14. 证明：方阵 $A$ 是正交矩阵的充分必要条件是：$|A| = \pm 1$，并且，如果 $|A| = 1$，则它的每一个元素等于自己的代数余子式，如果 $|A| = -1$，则它的每一个元素等于自己的代数余子式乘以 $-1$。

证明：设 $A = (a_{ij})$ 为正交矩阵，$A^* - (A_{ij})$ 为 $A$ 的伴随矩阵，所以 $A' - A^{-1} = \frac{1}{|A|}A*$，即 $a_{ij} = -\frac{1}{|A|}A_{ij}$. 如果 $|A| = 1$，则 $a_{ij} = A_{ij}$. 如果 $|A| = -1$，则 $a\,ij = -A_{ij}$.

如果 $|A| = \pm 1$，则 $A$ 可逆，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A*$，当 $|A| = 1$，时，有 $a_{ij} = A_{ij}$，即 $A^{-1} = A^* = A'$，当 $|A| = -1$，时，有 $a_{ij} = -A_{ij}$，$A^{-1} = -A^* = A'$，从而 $AA^{-1} = AA' = I$，即 $A$ 为正交矩阵.

15. 设 $A$ 是正交矩阵，证明：

(1) $A$ 的行列式等于 1 或 $-1$；

(2) 如果 $\lambda$ 是 $A$ 的一个特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 $A$ 的一个特征值；

(3) $A$ 的伴随矩阵也是正交矩阵；

(4) 如果 $A$ 的行列式等于 $-1$，则 $-1$ 是 $A$ 的一个特征值；

(5) 设 $B$ 是正交矩阵且 $|A| = -|B|$，则 $|A + B| = 0$.

证明：(1) $A^T A = E$，则 $|A^T A| = |E| = 1$，$|A|^2 = 1$，$|A| \in \mathbf{R}$，于是 $|A| = 1$ 或 $|A| = -1$.

(2) 因为 $A$ 是正交矩阵，则 $A$ 可逆，

那么，若 $\lambda$ 是 $A$ 的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $A^{-1}$ 的特征值，

因 $A^{-1} = A^T$，故 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 $A^T$ 的特征值，

而 $A$ 与 $A^T$ 有相同的特征值，故 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 $A$ 的特征值.

(3) $AA^* = |A|E$，则

$A^* = |A|A^{-1} = |A|A^T, (A^*)^T = |A|A$

因此

$A^*(A^*)^T = |A|^2 A^{-1} A = E$

所以 $A$ 的伴随矩阵也是正交矩阵.

(4) $|-E - A| = |-AA^T - A| = |A||-A^T - E| = -|-E - A|$，

因此

$|-E-A|=0$

即 $-1$ 是 $A$ 的一个特征值.

(6) $|A+B|=|A||E+A^{-1}B|=|A||B^TB+A^{-1}B|=|A||A^T+B^T||B|=-|A+B|$

故　$|A+B|=0$.

16. 已知 $A$ 是 $n$ 阶实对称矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A$ 的特征值，相对应的标准正交特征向量为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$. 求证：$A=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_n$.

证明：令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则 $Q$ 是正交矩阵.

$$A(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}Q'$$

$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}$$

$=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_n$.

17. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为欧氏空间 $V$ 的标准正交基，$\alpha=\varepsilon_1-2\varepsilon_2,\beta=2\varepsilon_1+\varepsilon_3$，求正交变换 $H$，使 $H(\alpha)=\beta$.

**解**：$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

令　$H(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

则 $H$ 是正交变换，且 $H(\alpha)=\beta$.

18. 设 $f$ 是有限维欧氏空间 $V$ 上的正交变换.

1) 证明 $f$ 的特征值只能是 1 或 $-1$.

2) 证明 $f$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交

3) 如果 1 和 $-1$ 都是 $f$ 的特征值；并且 $V_1$ 和 $V_{-1}$ 分别表示 $f$ 的属于特征值 1 和 $-1$ 的

特征子空间，若$f^2=\varepsilon$，证明$V_{-1}=V_1^{\perp}$.

**证明**:1)若$f(\alpha)=\lambda\alpha,\lambda\in\mathbf{R},\alpha\neq0$

由$f$是正交变换，则$(f(\alpha),f(\alpha))=(\lambda\alpha,\lambda\alpha)=\lambda^2(\alpha,\alpha)=(\alpha,\alpha)$

因 $(\alpha,\alpha)>0$，故$\lambda^2=1$

从而 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

(2)若$f(\alpha_1)=\alpha_1,f(\alpha_2)=\alpha_2$，则

$(\alpha_1,\alpha_2)=(f(\alpha_1),f(\alpha_2))=(\alpha_1,-\alpha_2)=-(\alpha_1,\alpha_2)$

于是 $(\alpha_1,\alpha_2)=0.$

(3)若$f^2=\varepsilon$，则$f$可以对角化，

于是存在$V$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$使得

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}$$

那么 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ ，$V_{-1}=L(\alpha_{r+1},\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

由(2) $V_{\perp}\subseteq V_1^{-1}$，$\dim V_1^{\perp}=n-r$ ，$\dim V_{-1}=n-r$

由正交补的唯一性，$V_{-1}=V_1^{\perp}$

19. 设$A$是一个3阶正交矩阵，且$|A|=1$.

(1)证明:$\lambda=1$必为$A$的特征值.

(2 证明:存在正交矩阵$Q$使得$Q'AQ=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$。

证明:(1) $|E-A|=(-1)^3|A-E|=-|A-E|=-|A'-E|$

$|E-A|=|A'A-A|=|A||A'-E|=|A'-E|$

于是 $|E-A|=0$

即 $\lambda=1$必为$A$的特征值.

(2)令$A\alpha_1=\alpha_1$，且$|\alpha_1|=1$，将$\alpha_1$扩充为3维欧氏空间$R^3$的一个标准正交基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

则 $$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{pmatrix} \qquad (一)$$

令 $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$Q$为正交矩阵.

令 $C=\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{pmatrix}$，则$C$为正交矩阵.

于是 $x=y=0$. 且$a,b,c,d$满足

$$\begin{cases}a^2+c^2=1\\ b^2+d^2=1\\ ab+cd=0\end{cases}$$

从而存在角$\alpha$使得$a=\cos\alpha,c=\pm\sin\alpha$

由$\cos(\pm\alpha)=\cos\alpha,\sin(\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$，为此不妨令

$a=\cos\alpha,c=\sin\alpha$

同理存在角 $\beta$ 使得 $b=\cos\beta, d=\sin\beta$.

那么 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$

即 $\cos(\beta-\alpha)=0$.

于是 $\beta=\alpha+(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$$\cos\beta=\cos\left(\alpha+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\sin\alpha, k\text{ 为奇数}\\-\sin\alpha, k\text{ 为偶数}\end{cases}$$

$$\sin\beta=\sin\left(\alpha+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}-\cos\alpha, k\text{ 为奇数}\\\cos\alpha, k\text{ 为偶数}\end{cases}$$

因此

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\text{或 } C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&\sin\alpha\\0&\sin\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix}$$

由 $|A|=1$ 知 $|C|=1$. 于是前者成立.

令 $\alpha=-\theta$,则 $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

由(一),存在正交矩阵 $Q$ 使得

$$Q'AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

20. 已知 $A$ 是 $n$ 阶实对称矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是 $A$ 的特征值,相对应的标准正交特征向量为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,求证 $A=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_n$。

证明:令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,则 $Q$ 是正交矩阵

$$A(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}Q^T$$

$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1^T\\\xi_2^T\\\vdots\\\xi_n^T\end{pmatrix}$$

$=\lambda_1\xi_1\xi_1^T+\lambda_2\xi_2\xi_2^T+\cdots+\lambda_n\xi_n\xi_n^T$。

21. $A=\begin{pmatrix}0&b&-c\\-b&0&a\\c&-a&0\end{pmatrix}$为实矩阵,令 $B=A^2+qA+E, q=a^2+b^2+c^2$, $E$ 为单位矩阵,问

当且仅当 $q$ 为何值时，$B$ 是正交矩阵？

解：$B'B=(A^2-qA+E)(A^2+qA+E)=A^4+2A^2+E-q^2A^2$

$B$ 是正交矩阵$\Leftrightarrow B'B=E\Leftrightarrow A^4=(q^2-2)A^2$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -b & c\\ b & \lambda & -a\\ -c & a & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+(a^2+b^2+c^2)\lambda=\lambda(\lambda^2+q)$$

$\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{q}i,\lambda_3=-\sqrt{q}i$ 是 $A$ 的特征值.

于是存在可逆矩阵 $T$，使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0 & & \\ & \sqrt{q}i & \\ & & -\sqrt{q}i\end{pmatrix}$$

从而 $$T^{-1}A^4T=\begin{pmatrix}0 & & \\ & q^2 & \\ & & q^2\end{pmatrix},\ T^{-1}(q^2-2)A^2T=\begin{pmatrix}0 & & \\ & q(2-q^2) & \\ & & q(2-q^2)\end{pmatrix}$$

$A^4=(q^2-2)A^2\Leftrightarrow q^2=q(2-q^2)$

当 $q=0$，则 $B$ 是正交矩阵.

当 $q\neq 0,q=2-q^2$，$q^2+q-2=0$，则 $(q+2)(q-1)=0$

即 $q=1$ 或 $q=-2$.

由 $q=a^2+b^2+c^2$，知 $q\geqslant 0$，从而 $q=1$.

故 当 $q=0,1$ 时，$B$ 是正交矩阵.

22. 设实数域上的 $s\times n$ 矩阵 $A$ 的元素只有0和1，并且 $A$ 的每一行元素的和是常数 $r$，$A$ 的每两个行向量的内积为常数 $m$，其中 $m<r$.

(1)求 $|AA'|$.

(2)证明 $s\leqslant n$.

(3)证明 $AA'$ 的特征值全为正实数.

**解**：(1)设 $A=(a_{ij})_{sn}$，由 $a_{ij}=0$ 或 1，令 $A_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，$i=1,2,\cdots,s$

则 $A_iA_j^T=m\geqslant 0$，$i\neq j$，$A_iA_i^T=ri,j=1,2,\cdots,s$

$$\text{于是}\quad |AA'|=\begin{vmatrix}A_1A'_1 & A_1A_2^T & \cdots & A_1A_s^T\\ A_2A_1^T & A_2A_2^T & \cdots & A_2A_s^T\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_sA_1^T & A_sA_2^T & \cdots & A_sA_s^T\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}r & m & \cdots & m\\ m & r & \cdots & m\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ m & m & \cdots & r\end{vmatrix}$$

$=[r+(s-1)m](r-m)^{s-1}$.

(2)由 $r>m\geqslant 0$，则 $|AA'|>0$

假定 $s>n$，由 $r(A)\leqslant n$，则 $r(AA^T)\leqslant r(A)\leqslant n<s$

从而 $|AA'|=0$ 矛盾.

故 $s\leqslant n$.

(3)令 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ 为 $AA'$ 的特征值，由 $AA'$ 是 $s$ 阶半正定矩阵，则

$\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,s$

而　$|AA'|>0$,则 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s=|AA'|>0$

于是　$\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,s.$

23. 设 $\sigma$ 是欧氏空间 $V$ 的一个线性变换,且 $\sigma$ 在一标准正交基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&2&-1&1\\1&-1&2&1\\-1&1&1&2\end{pmatrix}$$

(1)证明:$\varepsilon$(恒等变换) $\sigma,\sigma^2$ 线性相关.

(2)求 $V$ 的一组标准正交基,使得 $\sigma$ 在该基下的矩阵为对角矩阵。

**证明**:(1)考虑特征多项式

$|\lambda E-A|=(\lambda-3)^3(\lambda+1)$

特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3,\lambda_4=-1.$

$(A-3E)(A+E)=A^2-2A-3E=0$

因此　$\sigma^2-2\sigma-3\varepsilon=0$

即 $\varepsilon$(恒等变换) $\sigma,\sigma^2$ 线性相关.

(2)求 $A$ 的特征向量:

$$-E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1&1\\-1&-3&1&-1\\-1&1&-3&-1\\1&-1&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故　$\eta=(1\quad -1\quad -1\quad 1)'$

$$3E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则　$\xi_1=(1\quad 1\quad 1\quad 1)'\xi_2=(1\quad 0\quad 0\quad -1)'\xi_3=(0\quad 1\quad -1\quad 0)'$

是 $\lambda=3$ 的 3 个两两正交的特征向量.

设 $\sigma$ 在标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵为 $A$,

即　$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A$

令　$\varepsilon_1=\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3+\frac{1}{2}\alpha_4$

$\varepsilon_2=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3+\frac{1}{2}\alpha_4$

$\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_4$

$\varepsilon_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3$

则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 $V$ 的一标准正交基,在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1&&&\\&3&&\\&&3&\\&&&3\end{pmatrix}.$$

24. 在实数域上的 $n$ 维列向量空间 $R^n$ 中,定义内积为$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$,从而 $R^n$ 成为欧几里得空间.

(1)设实数域上的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&5&-2\\-2&1&-3&1\\-1&-7&9&-4\end{pmatrix}$$

求齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间的一个正交基;

(2)设 $A$ 是实数域 $R$ 上的 $s\times n$ 矩阵,以 $W$ 表示齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间,用 $U$ 表示 $A^T$ 的列空间(即 $A^T$ 的列向量组生成的子空间). 证明:$U=W^{\perp}$.

**解**:(1) 对系数矩阵 $A$ 实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&5&-2\\-2&1&-3&1\\-1&-7&9&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&5&-2\\0&-5&7&-3\\0&-10&14&-6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\0&-5&7&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&-\frac{7}{5}&\frac{3}{5}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=-\frac{4}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4\\x_2=\frac{7}{5}x_3-\frac{3}{5}x_4\end{cases}$$

基础解系为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-4\\7\\5\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\5\end{pmatrix}$$

将 $\alpha_1,\alpha_2$ 正交化,令 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-2\\-19\\25\\90\end{pmatrix}$$

则 $\beta_1,\beta_2$ 是 $W$ 的一个正交基.

(2)令 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_s\end{pmatrix}$, 则 $A^T=(A_1^T\quad A_2^T\quad\cdots\quad A_s^T)$

设 $R(A)=n-r$, $\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_r$是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系,则

$W=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_r)$, 且 $\dim W=r$,

$A\alpha_j=0,j=1,2,\cdots,r$

$\alpha_j^T A^T = \alpha_j^T(A_1^T \quad A_2^T \quad \cdots \quad A_s^T) = (\alpha_j^T A_1^T \quad \alpha_j^T A_2^T \quad \cdots \quad \alpha_j^T A_s^T) = 0, j = 1, 2, \cdots, r$

$U = L(A_1^T \quad A_2^T \quad \cdots \quad A_s^T)$

那么 $U \subseteq W^{\perp}$，又 $\dim W^{\perp} = n - r = \dim U$，

所以　$U = W^{\perp}$.

25. 设 $\sigma$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的正交变换，$W$ 是 $\sigma$ 的不变子空间，证明 $W$ 的正交补 $W^{\perp}$ 也是 $\sigma$ 的不变子空间.

证明：$\sigma(W) \subseteq W$，由 $\sigma$ 是正交变换，那么 $\sigma$ 可逆，则 $\sigma(W) = W$，

$\forall \alpha \in W^{\perp}, \forall \beta \in W$ 存在 $\beta_1 \in W$，使得 $\beta = \sigma(\beta_1)$，

那么

$(\sigma(\alpha), \beta) = (\sigma(\alpha), \sigma(\beta_1)) = (\alpha, \beta_1) = 0$

即 $\sigma(\alpha) \in W^{\perp}$，所以 $W^{\perp}$ 也是 $\sigma$ 不变子空间.

26. 设 $\sigma$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的线性变换，$\tau$ 是同一空间 $V$ 的一个变换，且对 $\forall \alpha, \beta \in V$，有 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \tau(\beta))$. 证明：

(1) $\tau$ 是 $V$ 的线性变换；

(2) $\sigma$ 的核等于 $\tau$ 的值域的正交补.

证明：(1) $\forall \alpha, \xi, \eta \in V$，有

$(\alpha, \tau(\xi + \eta)) = (\sigma(\alpha), \xi + \eta) = (\sigma(\alpha), \xi) + (\sigma(\alpha), \eta)$

$= (\alpha, \tau(\xi)) + (\alpha, \tau(\eta))$

$= (\alpha, \tau(\xi) + \tau(\eta))$

于是，$\forall \alpha \in V$

$(\alpha, \tau(\xi + \eta) - (\tau(\xi) + \tau(\eta))) = 0$

令 $\alpha = \tau(\xi + \eta) - (\tau(\xi) + \tau(\eta))$，则

$(\tau(\xi + \eta) - (\tau(\xi) + \tau(\eta)), \tau(\xi + \eta) - (\tau(\xi) + \tau(\eta))) = 0$

因此 $\tau(\xi + \eta) = \tau(\xi) + \tau(\eta)$.

同理可得 $\tau(k\xi) = k\tau(\xi)$.

所以 $\tau$ 是 $V$ 的线性变换.

(2) $\forall \xi \in \ker \sigma$，则 $\sigma(\xi) = 0$.

$\forall \beta \in \tau(V)$，那么存在 $\alpha \in V$ 使 $\beta = \tau(\alpha)$.

于是 $\xi \in \tau(V)^{\perp}$，从而 $\ker \sigma \subseteq \tau(V)^{\perp}$；

反之，$\forall \xi \in \tau(V)^{\perp}, \forall \eta \in \tau(V)$，有 $(\xi, \eta) = 0$.

令 $\eta = \tau(\sigma\xi)$，则

$(\xi, \tau(\sigma\xi)) = (\sigma\xi, \sigma\xi) = 0$.

于是 $\sigma(\xi) = 0, \xi \in \ker \sigma$，从而 $\tau(V)^{\perp} \subseteq \ker \sigma$.

因此

$\ker \sigma = \tau(V)^{\perp}$.

# 第六章 线性变换与矩阵

## §1 线性变换

1. 线性变换:线性空间 $V$ 的一个变换 $A$ 称为线性变换,如果对于 $V$ 中任意的元素 $\alpha,\beta$ 和数域 $P$ 中任意数 $k$,都有

$A(\alpha+\beta)=A(\alpha)+A(\beta)$;

$A(k\alpha)=Ak(\alpha)$.

性质:

1)设 $A$ 是 $V$ 的线性变换,则 $A(0)=0$, $A(-\alpha)=-A(\alpha)$.

2)线性变换保持线性组合与线性关系式不变.

即:若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$, 则

$A(\beta)=k_1A(\alpha_1)+k_2A(\alpha_2)+\cdots+k_rA(\alpha_r)$;

若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$,那么

$k_1A(\alpha_1)+k_2A(\alpha_2)+\cdots+k_rA(\alpha_r)=0$.

3) 线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向量组.

2. 线性变换的乘积:设 $A$,,$B$ 是线性空间 $V$ 的两个线性变换,

$(AB)(\alpha)=A,(B(\alpha))\quad(\alpha\in V)$.

则线性变换的乘积也是线性变换.

线性变换的乘法 1)适合结合律 $(AB)C=A(BC)$.

2)不适合交换律 $AB\neq BA$ .

3)$A\varepsilon=\varepsilon A=A$. ($\forall$线性变换 $A$)

3. 线性变换的加法:设 $A$,$B$ 是线性空间 $V$ 的两个线性变换,

$(A+B)(\alpha)=A(\alpha)+B(\alpha)\quad(\alpha\in V)$.

则线性变换的和还是线性变换.

数域 $P$ 中的数与线性变换 $A$ 的数量乘法定义为

4. 线性变换 $A$ 的逆变换:如果线性变换 $B$ 存在,使

$AB=BA=E$.

则 $B$ 称为 $A$ 的逆变换,记为 $A^{-1}$.

5. 线性变换 $A$ 的多项式 $f(A)$:设

$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$

是 $P[x]$ 中一多项式,则

$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_0E$

注:(1)$A^0=E$.

(2) $A^{m+n}=A^mA^n,(A^m)^n=A^{mn}(m,n\geqslant 0)$

(3) $A^{-n}=(A^{-1})^n$($n$ 是正整数).

(4) $(AB)^n\neq A^nB^n$.

(5) $h(A)=f(A)+g(A)$, $p(A)=f(A)g(A)$,

$f(A)g(A)=g(A)f(A)$.

## §2 线性变换和矩阵

1. 相似:设,$B$ 为数域 $P$ 上两个 $n$ 级方阵,如果∃数域 $P$ 上的 $n$ 级可逆方阵 $X$,使得 $B=X^{-1}AX$,就说 $A$ 相似于 $B$,记作 $A\sim B$.

2. 特征值与特征向量:线性变换 $A$,如果对于数域 $P$ 中一数 $\lambda_0$, $\exists\xi\neq 0$ ,

使得

$A\xi=\lambda_0\xi$.

那么 $\lambda_0$ 称为 $A$ 的一个特征值,而 $\xi$ 叫做 $A$ 的属于特征值 $\lambda_0$ 的一个特征向量.

3. 线性变换在基下的矩阵:设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是数域 $P$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 的一组基,$A$ 是 $V$ 中的一个线性变换. 基向量的像可以被基线性表出:

$$\begin{cases}A\varepsilon_1=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n,\\ A\varepsilon_2=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A\varepsilon_n=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n.\end{cases}$$

用矩阵表示就是

$$A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(A(\varepsilon_1),A(\varepsilon_2),\cdots,A(\varepsilon_n))$$
$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

矩阵 $A$ 称为线性变换 $A$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵.

**定理 1**　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是数域 $P$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 的一组基,在这组基下,每个线性变换按公式对应一个 $n\times n$ 矩阵,这个对应具有以下性质:

1)线性变换的和对应于矩阵的和;

2)线性变换的乘积对应于矩阵的乘积;

3)线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积;

4)可逆的线性变换与可逆矩阵对应,且逆变换对应于逆矩阵.

**定理 2**　设线性变换 $A$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是 $A$,向量 $\xi$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则 $A\xi$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

**定理 3** 设线性空间 $V$ 中线性变换 $A$ 在两组基

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,

$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$

下的矩阵分别为 $A$ 和 $B$,从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵是 $X$,于是 $B = X^{-1}AX$.

**定理 4** 线性变换在不同基下所对应的矩阵是相似的;反过来,如果两个矩阵相似,那么它们可以看作同一个线性变换在两组基下所对应的矩阵.

性质:如果 $B_1 = X^{-1}A_1X, B_2 = X^{-1}A_2X$,那么

1) $B_1 + B_2 = X^{-1}(A_1 + A_2)X$,

2) $B_1B_2 = X^{-1}(A_1A_2)X$

3) $kB_1 = X^{-1}(kA_1)X$

4) $B_1^k = X^{-1}(A_1^k)X$

5) $f(B_1) = X^{-1}f(A_1)X$

注 特征向量不是被特征值所唯一决定的.相反,特征值却是被特征向量所唯一决定的(因为一个特征向量只能属于一个特征值).

7. 矩阵 $A$ 的特征多项式 $|\lambda E - A|$:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

是数域 $P$ 上的一个 $n$ 次多项式.

$|\lambda E - A| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|$.

由根与系数的关系可知,$A$ 的全体特征值的和为 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$(称为 $A$ 的迹).而的 $A$ 全体特征值的积为 $|A|$.

**定理 5** 设 $n$ 阶方阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_i$,$\alpha_i$ 是 $A$ 的属于特征值 $\lambda_i$ 的特征向量($i = 1, 2, \cdots n$),则

1) $kA$ ($k$ 是常数)的特征值是 $k\lambda_i$,且$\alpha_i$ 是属于其的特征向量 ($i = 1, 2, \cdots n$).

2) $A^2$的特征值是 $\lambda^2$,且$\alpha_i$ 是属于其的特征向量 ($i = 1, 2, \cdots n$).

3) $A^k$的特征值是 $\lambda^k$,且 $\alpha_i$ 是属于其的特征向量 ($i = 1, 2, \cdots, n$).

4) $A^T$的特征值是 $\lambda_i$,且$\alpha_i$ 是属于其的特征向量 ($i = 1, 2, \cdots n$).

5) $A$ 可逆时,$A^{-1}$的特征值是 $\lambda_i^{-1}$,且$\alpha_i$ 是属于其的特征向量 ($i = 1, 2, \cdots n$).

6) $A$ 可逆时,$A$ 的伴随矩阵$A^*$ 的特征值是$|A|\lambda_i^{-1}$,且$\alpha_i$ 是属于其的特征向量($i = 1, 2, \cdots n$).

7) 设$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$,则 $f(A)$的特征值是$f(\lambda_i)$,且$\alpha_i$ 是属于其特征向量 ($i = 1, 2, \cdots n$).

**定理6** 相似矩阵有相同的特征多项式,从而具有相同的特征根. 反之,特征多项式相同的矩阵不一定是相似的.

**定理7** 相似矩阵有相同的行列式. 以后就可以说线性变换的行列式.

哈密顿-凯莱(Hamilton-Caylay)定理 设 $A$ 是数域 $P$ 上一个 $n\times n$ 矩阵,$f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 $A$ 的特征多项式,则

$$f(A)=A^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|E=0$$

**推论** 设 $A$ 是有限维空间 $V$ 的线性变换,$f(\lambda)$ 是 $A$ 的特征多项式,那么 $f(A)=0$.

**定理9** 设 $A$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个线性变换,$A$ 的矩阵可以在某一基下为对角矩阵的充要条件是 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

**定理10** 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

**推论1** 如果在 $n$ 维线性空间 $V$ 中,线性变换 $A$ 的特征多项式在数域 $P$ 中有 $n$ 个不同的根,即 $\mathring{A}$ 有 $n$ 个不同的特征值,那么 $A$ 在某组基下的矩阵是对角形的.

**推论2** 在复数上的线性空间中,如果线性变换 $A$ 的特征多项式没有重根,那么 $A$ 在某组基下的矩阵是对角形的.

**定理11** 设 $A$ 是实对称矩阵,则 $R^n$ 中属于 $A$ 的不同特征值的特征向量必正交.

**定理12** 如果 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是线性变换 $A$ 的不同的特征值,而 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 是属于特征值 $\lambda_i$ 的线性无关的特征向量,$i=1,2,\cdots,k$ 那么向量组 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{ir_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kr_k}$ 也线性无关.

**定理13** 对于任意 $n$ 级实对称矩阵 $A$,都存在一个 $n$ 级正交矩阵 $T$,使成 $T'AT=T^{-1}AT$ 对角形,且 $A$ 的特征值皆为实数.

**定理14** 设 $A$ 是复数域上线性空间 $V$ 的一个线性变换,则在 $V$ 中必定存在一组基,使 $A$ 在这组基下的矩阵是若尔当形矩阵.

**定理15** 每个 $n$ 级复矩阵 $A$ 都与一个若尔当形矩阵相似.

## 自测题

**一、填空题**(每小题3分,共18分)

1. $\sigma$ 是 $F^{2\times 2}$ 上的线性变换,若 $\sigma(A)=\begin{pmatrix}1&7\\0&10\end{pmatrix}$,则 $\sigma(-3A)=$ ________.

2. $\sigma:R^2\to R^2,\sigma(x,y)=(-2x+y,0)$;$\tau:R^2\to R^2,\tau(x,y)=(-3y,x+y)$,则 $(\sigma+\tau)(x,y)=$ ________. $(\tau\sigma)(x,y)=$ ________. $(-2\sigma)(x,y)=$ ________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$,则向量 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 是 $A$ 的属于特征值________的特征向量.

4. 若 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 与 $B\begin{pmatrix}1&k&0\\-1&0&-1\\0&k&1\end{pmatrix}$ 相似,则 $k=$ ________.

5. 设三阶方阵 $A$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+3$,则 $|A|=$ ________.

6. $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $A^2=A$,则 $A$ 的特征值为________.

**二、判断说明题**(每小题5分,共20分)

1. $n$ 阶方阵 $A$ 至少有一特征值为零的充分必要条件是 $|A|=0$.

2. 已知 $A=PBP^{-1}$,其中 $P$ 为 $n$ 阶可逆矩阵,$B$ 为一个对角矩阵. 则 $A$ 的特征向量与 $P$ 有关.

3. $\sigma$ 为 $V$ 上线性变换,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 $V$ 的基,则 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 线性无关.

4. $\alpha$ 为 $V$ 上的非零向量,$\sigma$ 为 $V$ 上的线性变换,则 $\sigma^{-1}(\alpha)=\{\eta|\sigma(\eta)=\alpha\}$ 是 $V$ 的子空间.

**三、计算题**(每小题 14 分,共 42 分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似.

(1)求 $a,b$ 的值;

(2)求可逆矩阵,使 $P^{-1}AP=B$.

2. $F^3$ 中,线性变换 $\sigma$ 关于基 $\alpha_1=(-1,1,1),\alpha_2=(1,0,-1),\alpha_3=(0,1,1)$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$

(1)求 $\sigma$ 关于标准基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的矩阵;

(2)设 $\alpha=\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3,\beta=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3$,求 $\sigma(\alpha),\sigma(\beta)$ 关于基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的坐标.

3. 设 $\alpha$ 是 $R^3$ 的线性变换,$\alpha(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-x_3,x_2+x_3,x_1+x_2-2x_3)$

(1)求 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的一个基和维数;

(2)求 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 的一个基和维数.

**四、证明题**(每小题 10 分,共 20 分)

1. 设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵,且有 $r(A+I)+r(A-I)=n,A\neq I$,证明:$-1$ 是 $A$ 的特征值.

2. 设 $\sigma,\tau$ 是 $V$ 上的两个线性变换,证明:

(1)$\mathrm{Im}(\sigma)=\mathrm{Im}(\tau)$ 的充要条件是 $\sigma\tau=\tau,\tau\sigma=\sigma$;

(2)$\ker(\sigma)=\ker(\tau)$ 的充要条件是 $\sigma\tau=\sigma,\tau\sigma=\tau$.

# 典型例题解析

1. 设 $A$ 是个 $n$ 阶矩阵,证明 $A$ 的属于不同特征值的特征向量线性无关.

**证**:设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 $A$ 的两两不同的 $r$ 个特征值,非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 适合

$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,1\leqslant i\leqslant r$,

假设

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0$,

那么有

$A^j(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r)=0,1\leqslant j\leqslant r-1$.

即

$A^j(\sum_{i=1}^{r}x_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{r}x_iA^j\alpha_i=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^j\cdot(x_i\alpha_i)=0$,

注意到

$|(\lambda_i^j)_{r\times r}|\neq 0$,

必须 $x_1\alpha_1=x_2\alpha_2=\cdots=x_r\alpha_r=0$,于是 $x_1=x_2=\cdots=x_r=0$,这证明了 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

2. 设 $A,B$ 是 $n$ 阶非零矩阵，且有 $A^2=A,B^2=B,AB=BA=0$，

**证明**：(1)0,1，必然是 $A,B$ 的特征值

(2)若 $x$ 是 $A$ 的属于特征值 1 的特征向量，则 $x$ 也是 $B$ 的属于 0 的特征向量

**证明**：(1)令 $A\xi=\lambda\xi,\xi\neq 0$，则 $A^2\xi=A,A\xi=A(\lambda\xi)=\lambda\xi A=\lambda^2\xi$

从而 $\lambda^2\xi=\lambda\xi$，则 $\lambda^2=\lambda$

即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$

同理可知，$B$ 的特征值为 0 或 1

如果 $A$ 的特征值全为 0，而 $A^2=A$ 知 $A$ 与对角矩阵相似

这样就推出 $A=0$，得 $B=0$ 矛盾

如果 $A$ 的特征值全为 1，由 $A$ 与对角矩阵相似，知 $A=E$

代入 $AB=0$ 得 $B=0$ 矛盾

故 0,1，必为 $A$ 的特征值，同理 0,1，必为 $B$ 的特征值

(2)若 $x$ 是 $A$ 的属于特征值 1 的特征向量，则 $Ax=x,x\neq 0$

$BX=B(AX)=(BA)X=(AB)X=0X$

从而 $X$ 是 $B$ 的属于特征值 0 的特征向量

3. 设是 $BA$ 的非零特征值，以 $V_{\lambda_0}^{BA}$ 表示 $BA$ 的关于 $\lambda_0$ 的特征子空间

证明(1) $\lambda_0$ 也是 $AB$ 的特征值

(2) $\dim V_{\lambda_0}^{BA}=\dim V_{\lambda_0}^{AB}$

分析：只需证明 $\lambda_0E-AB$ 与 $\lambda_0E-BA$ 等价即可，因为 $\lambda_0E-AB$ 等价于 $\lambda_0E-BA$ 的充要条件是 $AB$ 与 $BA$ 相似，11 相似就具有相同的特征值；22$\lambda_0E-AB$ 等价于 $\lambda_0E-BA$ 则它们的秩就相等

**证明**：$\lambda_0\neq 0$

$$\begin{pmatrix} A & E \\ \lambda_0E & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & E \\ \lambda_0E-BA & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \lambda_0E-BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & E \\ \lambda_0E & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & E \\ E & \lambda_0{}^{-1}B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & \lambda_0E \\ E & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & \lambda_0E-BA \\ E & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \lambda_0E-BA \end{pmatrix}$$

4. 设 $A,B$ 是 $n$ 阶矩阵，证明 $AB$ 与 $BA$ 有相同的特征根.

**证明**：若 0 是 $AB$ 的特征根，则

$ABX=0\cdot X=0,X\neq 0$

故 $AB$ 不可逆，

于是 $A,B$ 中至少有一个不可逆，

从而 $BA$ 不可逆，

故 有非零向量 $X$ 使 $BAX=0$，即 0 是 $BA$ 的特征根.

设 $\lambda\neq 0$ 是 $AB$ 的特征根，即

存在 $X\neq 0$ 使 $ABX=\lambda X$，

令 $Y=BX$，则 $AY=ABX=\lambda X\neq 0$，

因此 $Y\neq 0$，

于是 $BAY=BABX=B\cdot\lambda X=\lambda BX=\lambda Y$.

，即 $Y$ 属于 $BA$ 的特征向量，$\lambda$ 是 $BA$ 的特征根

同理可证 $BA$ 的任何特征根也是 $AB$ 的特征根.

5. 设 $A,B$ 分别为 $n\times m$ 与 $m\times n$ 矩阵,若 $n>m$,则 $AB$ 与 $BA$ 的特征多项式只差一个因子 $\lambda^{n-m}$,

证　令 $A_1-(A,0)$ 是 $n$ 阶矩阵,$B_1-\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}$是 $n$ 阶矩阵,由上题 $A_1B_1$ 与 $B_1A_1$ 有相同的特征多项式,设 $BA$ 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)$,则

$$|\lambda I-AB| = |\lambda I-A_1B_1| = |\lambda I-B_1A_1|$$

$$\left|\lambda I-\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}(A,0)\right| = \begin{vmatrix}\lambda I-BA & 0\\ 0 & \lambda I_{n-m}\end{vmatrix}-\lambda^{n-m}\cdot\varphi(\lambda).$$

6. 设 $A,B$ 是正定矩阵,则 $AB$ 的特征根大于 0.

**证明:** 设 $A=PP',B=QQ'.$ ,其中

$|P|\neq 0.$ $|Q|\neq 0.$ $AB=PP'QQ'=(PP'Q)Q'$,但

$(PP'Q)Q'$与 $Q'(PP'Q)$有相同的特征根,

又　$Q'(PP'Q)=(P'Q)'(P'Q)$是正定矩阵,

故　$Q'(PP'Q)$的特征根大于 0,

即　$AB$ 的特征根大于 0. .

7. 设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵,证明:$A^m=0$ 当且仅当 $A$ 的特征根全为零.

**证明:** 设 $A^m=0$, $A^m$ 的特征根 $\lambda^m=0.$ $\lambda=0.$

反之,设 $P^{-1}AP=J$ 是 $A$ 的若当形,则 $A=PJP^{-1}$.

从而 $A^m=PJ^mP^{-1}$

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{bmatrix},\ J_i=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{bmatrix}$$

设 $J_i$ 的阶数为 $m_i$,则 $J_i^{m_i}=0$,取 $m=\max\{m_i\}$ ,$i=1,2,\cdots,s$.

那么 $J^m=0$.

8. 设 $B=\begin{pmatrix}0 & A\\ A & 0\end{pmatrix}$,$A$ 是 $n$ 阶实对称矩阵,$A$ 的特征根是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,求 $B$ 的特征根.

**解:** 因为 $A$ 是实对称矩阵,故存在正交矩阵 $T_1$,使

$$T_1AT'_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

令 $T=\begin{vmatrix}0 & T_1\\ T_1 & 0\end{vmatrix}$,则 $T'T=I$,即 $T$ 是正交矩阵,$T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & T_1\\ T_1 & 0\end{bmatrix}$

$$TBT^{-1}=\begin{bmatrix}0 & T_1\\ T_1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & A\\ A & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & T'_1\\ T'_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & T'_1AT_1\\ T'_1AT_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{cccc:cccc}0&&&&\lambda_1&&&\\&0&&&&\lambda_2&&\\&&\ddots&&&&\ddots&\\&&&0&&&&\lambda_n\\ \hdashline \lambda_1&&&&0&&&\\&\lambda_2&&&&0&&\\&&\ddots&&&&\ddots&\\&&&\lambda_n&&&&0\end{array}\right]=B_1$$

$B$ 与 $B_1$ 有相同的特征根,下面求 $B_1$ 的特征根.

$$|\lambda I-B_1|=\left|\begin{array}{cccc:cccc}\lambda&&&&-\lambda_1&&&\\&\lambda&&&&-\lambda_2&&\\&&\ddots&&&&\ddots&\\&&&\lambda&&&&-\lambda_n\\ \hdashline -\lambda_1&&&&\lambda&&&\\&-\lambda_2&&&&\lambda&&\\&&\ddots&&&&\ddots&\\&&&-\lambda_n&&&&\lambda\end{array}\right|.$$

令 $\lambda=\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n$,将 $|\lambda_1 I-B_1|$ 的 $i$ 列与第 $i+n$ 列相加,则 $|\lambda_1 I-B_1|=0$。

令 $\lambda=-\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n$,将 $|-\lambda_1 I-B_1|$ 的 $i$ 列与第 $i+n$ 列相减得 $|-\lambda_1 I-B_1|=0$。即 $B$ 的特征根是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n$.

9. 设 $n$ 阶实方阵 $A$ 的特征根全是实数,且 $A$ 的所有一阶主子式之和,所有 2 阶主子式之和全为零,求证 $A$ 是 $n$ 次幂零阵.

证:设 $A$ 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+A_n$,则 $-a_1$ 是 $A$ 的一阶主子式之和,故 $a_1=0$.

由多项式根与系数的关系知,

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=-a_1=0, \tag{1}$$

$$\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=a_2=0. \tag{2}$$

(1)式的平方 $-2\times(2)$:$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=0$,$\lambda_i$ 为实数,故 $\lambda_i=0$,由 3.40 题知 $A$ 是幂零矩阵,即存在 $k$ 使 $A^k=0$,若 $k<n$. 显然 $A_n=0$,若 $k>n$ 由 7 题知 $A^n=0$.

10. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 的主对角线上的元素全为 1,其特征根全是非负数,求证 $|A|\leqslant 1$.

证明; 由 *Cauchy* 不等式知,对任意 $a_i\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n$,

有 $\quad(\sum_{i=1}^{n}a_1)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}a_i)$,

因此 $\quad|A|^{\frac{1}{n}}=(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}{n}$

$$=\frac{1+1+\cdots+1}{n}=\frac{n}{n}=1,$$

即 $\quad|A|\leqslant 1$.

11. 设 $n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明：$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}$.

证 因 $A^2$ 的全部特征根为 $\lambda_r^2, i=1,2,\cdots,n$，所以

$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=T_r(AA)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}$

12. 设 $A,B$ 为实对称矩阵，证明 $AB-BA$ 的实特征值为零.

证 令 $C=AB=BA, C'=B'A'-A'B'-BA-AB=-C$ ，

即 $C$ 为反对称矩阵，

从而其特征根为 0 或纯虚数，

故 $AB-BA$ 的实特征值为零.

13. 设 $A$ 是一个 $n$ 阶不可逆矩阵，试证 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 的特征根是一个 $n$ 重零根或一个 $n-1$ 重零根及一个根 $A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$，其中 $A_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 在 $A$ 中的代数余子式

$a_{ij}$ 是 $A$ 的元素.

**证明：**$r(A)\leqslant n-1$ ，

故 $r(A^*)\leqslant 1$，

即 $A^*$ 的 $i$ 阶主子式全为零，$i\geqslant 2$

于是，$A^*$ 的特征多项式是 $f(\lambda)=\lambda^n-(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})\lambda^{n-1}$.

若 $A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}\neq 0$，

则 $A^*$ 的特征根一个是 $A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$，其余 $n-1$ 个为零。

否则，$A^*$ 的特征根是 $n$ 个零根。

14. 设 $A,B$ 是 $n$ 阶矩阵，$C=AB-BA$，$C$ 与 $A,B$ 可换且 $C\neq 0$. 证明：$C$ 不相似于对角形.

**证明：**若 $P^{-1}CP=C_1$，$C_1$ 为对角形矩阵，令 $P^{-1}AP=A_1$，$P^{-1}BP=B_1$，则 $C_1=A_1B_1=B_1A_1$，且 $C_1$ 与 $A_1,B_1$ 可换. 设

$$C_1=\begin{bmatrix}a_1I_1 & & & \\ & a_2I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_sI_s\end{bmatrix}, i\neq j \text{ 时}, a_i\neq a_j$$

由 $A_1C_1=C_1A_1$ 得

$$A_1=\begin{bmatrix}A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}\end{bmatrix}\text{。同理，}B_1=\begin{bmatrix}B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss}\end{bmatrix}$$

由 $C_1=A_1B_1=B_1A_1$，有 $A_{ii}B_{ii}=B_{ii}A_{ii}=a_iI_i$，左端的迹等于 0，故右端的迹亦应为 0，即 $a_i=0, i=1,2,\cdots,s$，从而 $C_1=P^{-1}CP$，有 $C=0$，矛盾。

15. 设 $A^2=A$，证明 $A$ 相似于对角形.

**证明：**设 $\lambda$ 是 $A$ 的特征根，则存在 $X\neq 0$，

使 $AX=\lambda X$、于是 $A^2X=\lambda^2X=AX=\lambda X$，

即 $\lambda^2=\lambda, \lambda=0,1$

设 $A$ 是 $n$ 阶方阵，$A$ 的属于 $\lambda=0$ 的线性无关向量的最大个数等于 $n-r(0I-A)=n-r(A)$，属于 $\lambda=I$ 的线性无关的特征向量的最大个数为 $n-r(I-A)$.

由 $A^2=A$ 知 $r(I-A)+r(A)=n$,,

又属于不同特征根的特征向量是线性无关的,

故 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量,

即 $A$ 相似于对角形.

16. 设 $A,B$ 相似于对角形,$AB=BA$,证明 $A,B$ 同时相似于对角形.

**证**:设 $PAP^{-1}=A_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_1 & & & \\ & \lambda_2 I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_s\end{pmatrix}$,

$i\neq j$ 时,$\lambda_i\neq\lambda_j$,又设 $B_1=P^{-1}BP$,由 $AB=BA$ 知 $A_1B_1=B_1A_1$,从而有

$$B_1=\begin{pmatrix}B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss}\end{pmatrix},$$

$B_1$ 相似于 $B$,故相似于对角形,

令 $P_{ii}^{-1}B_{ij}P_{ij}=C_{ij}$是对角形,则 $Q=\begin{pmatrix}P_{11} & & & \\ & P_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_{ss}\end{pmatrix}$,

进而　$Q^{-1}B_1Q=\begin{pmatrix}C_{11} & & & \\ & C_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{ss}\end{pmatrix}=C$

是对角形,故

$Q^{-1}P^{-1}BPQ=C.$

令 $PQ=R$,则 $R^{-1}BR=C$

另一方面,

$$R^{-1}AR=Q^{-1}A_1Q==\begin{pmatrix}P_{11}^{-1}\lambda_1 I_1 P_{11} & & & \\ & P_{22}^{-1}\lambda_2 I_2 P_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_{ss}^{-1}\lambda_s I_s P_{ss}\end{pmatrix}=A_1$$

即 $R^{-1}BR$ 与 $R^{-1}AR$ 同时为对角形.

17. 设 $A,B$ 是 $n$ 阶方阵,$AB=BA$,则 $A$ 与 $B$ 有一个公共的特征向量。

**证**:设 $X$ 是 $A$ 的属于 $\lambda$ 的特征量,

则 $AX=\lambda X,ABX=BAX=\lambda BX,\ \cdots,AB^kX=\lambda B^kX$。

设 $X,BX,\cdots,B^{k-1}X$ 线性无关,而 $B^kX$ 可写成它们的线性组合,

令 $L=L(X,BX,\cdots B^{k-1}X)$,对任意的 $Y\in L$,有 $Y=l_0X+l_1BX+\cdots+l_{k-1}B^{k-1}X$ 我们证明存在 $Y\in L$,有 $BY=\mu Y$,且 $Y\neq0$.

假设 $BY=\mu Y$,我们有

$l_0BX+l_1B^2X+\cdots+l_{k-1}B^kX=l_0\mu X=l_1\mu BX+\cdots+l_{k-1}\mu B^{k-1}X.$

于是 $l_0\mu X+(l_1\mu-l_0)BX+\cdots+(l_{k-1}\mu-l_{k-2})B^{k-1}X-l_{k-1}B^kXB^kX\in I$,

故 存在数 $n_0,n_1,\cdots,n_{k-1}$,使

$B^kX=n_0X+n_1BX+\cdots+n_{k-1}B^{k-1}X$

取 $l_{k-1}=1,l_0\mu=n_0,l_1\mu-l_0=n_1,\cdots,l_{k-1}\mu-l_{k-2}=n_{k-1}$,

则有 $BY=\mu Y.$

因 $l_{k-1}=1$,故 $Y\neq 0$,

易见总可适当选取 $\mu$ 与 $l_i$ 使上面的式子成立.

因此 $Y\in L$,故 $Y$ 是 $A$ 的特征向量。

18. 设 $A,B$ 是 $n$ 阶矩阵,$AB=BA$。证明 $A,B$ 同时相似与三角形矩阵。

证 对 $A,B$ 的阶数 $n$ 用归纳法。

$n=1$ 时结论显然成立,设 $n<k$ 时,结论成立,我们证明 $n=k$ 时结论亦成立。

由上题知,$A,B$ 有公共的特征向量 $X_1$,设 $AX_1=\lambda X_1,BX_1=\mu X_1$,

设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是 $n$ 维线性空间的一组基,再此基下 $A,B$ 对应的线性变化 $A,B$ 的矩阵分别为

$$A_1=\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & A_2\end{pmatrix},B_1=\begin{pmatrix}\mu & \beta\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$$

于是 $Q^{-1}AQ=A_1,Q^{-1}BQ=B_1$,,由 $AB=BA$ 有

$$\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mu & \beta\\ 0 & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \beta\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & A_2\end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix}\lambda_\mu & \lambda\beta+aB_2\\ 0 & A_2B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\lambda & \mu a+\beta A_2\\ 0 & B_2A_2\end{pmatrix},A_2B_2=B_2A_2.$

又归纳假设 $A_2,B_2$ 同时相似于三角形,即存在非异矩阵 $P_2$ 使 $P_2^{-1}A_2P_2,P_2^{-1}B_2P_2$ 同时为三角形阵

$$P_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p_2\end{pmatrix},$$

则 $P_1^{-1}A_1P_1=\begin{pmatrix}\lambda & aP_2\\ 0 & P_2^{-1}A_2P_2\end{pmatrix},P_1^{-1}B_1P_1=\begin{pmatrix}\mu & \beta P_2\\ 0 & P_2^{-1}B_2P_2\end{pmatrix},$

是三角形矩阵.

令 $P=QP_1$,则 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 是三角形矩阵.

注:1)设 $A$ 是一个 $n$ 阶矩阵,$A^2=A$,证明 $A$ 相似于一个对角矩阵$\begin{bmatrix}E_r & o\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

2)若 $A$ 是一 $n$ 阶实对称矩阵,$A^2=A$ 则存在正交矩阵 $Q$,使 $Q^{-}AQ=\begin{bmatrix}E_r & o\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

3)设 $A^2=AB^2=B$,证明:

(1)$A$ 与 $B$ 有相同值域的充要条件是 $AB=B,BA=A$

(2)$A$ 与 $B$ 有相同核的充要条件是 $AB=A,BA=A$(北大教材 $P327$)

19. 设 $A$ 是实对称矩阵,$\lambda_1$ 和 $\lambda_n$ 分别是 $A$ 的最小和最大特征根,则 $A-aE$(充要条件)当 $a$

$>\lambda_n$ 时是负定的，当 $a<\lambda_1$ 时是正定的，反之若后面的条件成立，则 $A$ 的特征根在$(\lambda_1,\lambda_n)$之间

证明：令 $B=A-aE$，则 $|\lambda E-B|=|(\lambda+a)E-A|$

于是 $\lambda_i$ 是 $A$ 的特征根当且仅当 $\lambda_i-a$ 是 $B$ 的特征根，$i=1,2,\cdots,n$

"$\Rightarrow$"

当 $a\lambda_1$ 时，因 $\lambda_1$ 是 $A$ 的最小特征根，知 $\lambda_i-a>0,i=1,2,\cdots,n$

即 $B$ 的特征根全大于 0，故 $B$ 正定

当 $a>\lambda_n$ 时，因 $\lambda_n$ 是 $A$ 的最大特征根，知 $\lambda_i-a<0,i=1,2,\cdots,n$

即 $B$ 的特征根全小于 0，故 $B$ 负定

"$\Leftarrow$"

只要 $a>\lambda_n$，则 $B=A-aE$ 负定。设 $\alpha_n$ 是 $A$ 的最大特征值，证明 $\alpha_n\leqslant\lambda_n$，因此若 $\alpha_n>\lambda_n$，必定存在 $a$ 满足 $\alpha_n>a>\lambda_n$，

由 $B$ 负定知 $B$ 的特征根 $\alpha_n-a<0$，于是 $\alpha_n<a$ 矛盾，

同理可证 $A$ 的最小特征根 $\alpha_1\geqslant\lambda_1$

20. 设 $A$ 和 $B$ 为实对称矩阵，他们的最大最小特征根分别为 $a_n,b_n$ 和 $a_1,b_1$，证明 $A+B$ 的最大和最小特征根 $\lambda_n,\lambda_i$ 满足 $\lambda_n\leqslant a_n+b_n,\lambda_1\geqslant a_1+b_1$.

**证明**：由于 $A,B$ 为实对称矩阵，故其特征根为实数

设 $A$ 的特征根为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 且 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$

再 $B$ 的特征根为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$

存在正交矩阵 $T$ 使得 $T'AT=\begin{bmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{bmatrix}$

于是

$$T'(A-a_1E)T=\begin{bmatrix}a_1-a_1&&&\\&a_2-a_1&&\\&&\ddots&\\&&&a_n-a_1\end{bmatrix}a_i-a_1\geqslant0,i=1,2,\cdots,n$$

从而 $A-a_1E$ 是半正定矩阵，同理 $B-b_1E$ 为半正定矩阵

于是$(A-a_1E)+(B-b_1E)$仍为半正定矩阵，其特征根大于等于零

设 $\lambda$ 为 $A+B$ 的任意一特征根，则 $\lambda-(a_1+b_1)\geqslant0$ 即 $\lambda\geqslant(a_1+b_1)$

特别 $\lambda_1\geqslant(a_1+b_1)$

同理可证 $\lambda_n\leqslant(a_n+b_n)$

21. 设 $A$ 为实对称矩阵，其特征根为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，则对任意的实向量 $X$ 有 $\lambda_1X^TX\leqslant X^TAX\leqslant\lambda_nX^TX$.

**证明**：由上题可知 $A-a_1E$ 是半正定矩阵，于是 $\forall x$ 有

$x^T(A-\lambda_1E)x\geqslant0$ ，即 $x^TAx\geqslant\lambda_1x^Tx$

同理可证 $x^TAx\leqslant\lambda_nx^Tx$.

22. 设 $A$ 为实对称矩阵，$A$ 的任意元素 $a_{ij}\geqslant0$，

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A$ 的 $n$ 个特征根证明存在特征根 $\lambda=\max|\lambda_i|$

**证明**:($i$)若 $A$ 的每个元素都为零,结论显然成立

($ii$)若存在 $a_{ij}\neq0$,由于 $a_{ij}\geqslant0$ 对所有 $i,j$ 都成立,则

当 $x\neq0$ 时,$x^TAx>0$

设 $\lambda$ 是 $A$ 的最大特征值,由上题 $\forall x$ 有 $\lambda x^Tx\geqslant x^TAx$

那么当 $x\neq0$ 时 $\lambda\geqslant\frac{x^TAx}{x^Tx}>0$

即 $A$ 的最大特征根为正数

对 $A$ 的任意特征根 $\lambda_i$,

设 $AX_0=\lambda_iX_0$ 其中 $X_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

令 $Y_0=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,其中 $y_i=|x_i|$,于是 $Y_0>0$

则 $Y_0'Y_0=X_0'X_0$ 且 $Y_0'AY_0=|X_0'AX_0|$

从而 $\lambda\geqslant\frac{Y_0'AY_0}{Y_0'Y_0}\geqslant\left|\frac{X_0'AX_0}{X_0'X_0}\right|=|\lambda_i|$

即 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|$

23. 证明实二次型 $f(x)=X_0{}^TAX_0$ 在向量 $X$ 的模 $|(x)|=1$ 时的最大值,即为实对称矩阵 $A$ 的最大特征值

**证明**:$A$ 是实对称矩阵,则 $\exists$ 正交矩阵 $Q$ 使

$$Q_0^TAQ=Q_0^TAQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$

对二次型 $f(x)$ 作正交线性替换 $X=QY$,且令 $|(x)|=1$,即 $X^TX=1$

那么

$$f(x)=X^TAX=\frac{X^TAX}{X^TX}=\frac{Y^TQ^TAQY}{Y^TQ^TQY}=\frac{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2}{Y^TY}$$

$$=\frac{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}\leqslant\lambda_n$$

令 $Y_0^T=(0,\cdots,0,1)$,则存在 $X_0=QY_0$ 使 $f(x_0)=\frac{\lambda_ny_n^2}{y_n^2}=\lambda_n$

即结论成立

24. $A$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的线性变换,$A^2=A$ 证明:$A^{-1}(0)+AV=V$

**证明**:$\forall\alpha\in A^{-1}(0)\cap AV$,$\exists\beta\in V$ 使得 $\alpha=A\beta$,且 $A\alpha=0$

所以 $0=A\alpha=A(A\beta)=A^2\beta=A\beta=\alpha$

即 $\alpha=0$

从而 $A^{-1}(0)\cap AV=\{0\}$

又因为 $\dim AV+\dim A^{-1}(0)=n$

于是 $\dim\ (A^{-1}(0)+AV)=\dim AV+\dim A^{-1}(0)-\dim\ (A^{-1}(0)\cap AV)=n$

故 $A^{-1}(0)+AV=V$ 且 $A^{-1}(0)+AV=V$

注：$A^{-1}(0)+AV=V \Leftrightarrow A^{-1}(0)\cap AV=\{0\}$（由维数公式既得）

25. 设 $A$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个线性变换，$V_1$ 与 $V_2$ 是 $V$ 的两个子空间，且 $V=V_1\oplus V_2$，证明 $A$ 是可逆线性变换的充要条件是 $V=AV_1\oplus AV_2$

**证明：**"$\Rightarrow$"

若 $A$ 是可逆变换，则 $A^{-1}$ 存在，且也是一个线性变换

$\forall \alpha\in V$ 由于 $V=V_1\oplus V_2$，故 $\exists \alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$ 使 $A^{-1}\alpha=\alpha_1+\alpha_2$

用 $A$ 作用上式两边得

$A(A^{-1}\alpha)=A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2$

$A(A^{-1}\alpha)=(AA^{-1})\alpha=\varepsilon\alpha=\alpha$

则有　$\alpha=A\alpha_1+A\alpha_2, A\alpha_1\in AV_1, A\alpha_2\in AV_2$

故　$V=AV_1\oplus AV_2$

$V\alpha\in AV_1\cap AV_2$ 则 $\alpha\in V_1$，且 $\alpha\in V_2$

于是 $\exists\beta_1\in V_1,\beta_2\in V_2$ 使 $A\beta_1=\alpha=A\beta_2$

又 $A$ 是可逆线性变换，从而

$\beta_1=A^{-1}(A\beta_1)=A^{-1}\alpha=A^{-1}(A\beta_2)=\beta_2$

故　$A^{-1}\alpha\in V_1\cap V_2$，

于是　$A^{-1}\alpha=0$，

所以 $\alpha=0$

亦即　$V=AV_1\oplus AV_2$

"$\Leftarrow$"

若　$AV_1\oplus AV_2=V$，则 $\forall\beta\in V_1$，$\exists\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$ 使得

$\beta=A\alpha_1+A\alpha_2$

令　$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，则

$A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha=A\alpha_1+A\alpha_2$

于是　$A\alpha=\beta$，

即 $A$ 满射

26. (1) 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-2&-3&-1\end{pmatrix}$，$a$. 若把 $A$ 看成有理数域上的矩阵，判断 $A$ 是否可对角化，写出理由；$b$. 若把 $A$ 看成复数域上的矩阵，判断 $A$ 是否可对角化写出理由.

(2) 设 $A$ 是有理数域上的 $n$ 阶对称矩阵，并且在有理数域上 $A$ 合同于单位矩阵 $I$，用 $\delta$ 表示元素全为 1 的列向量，$b$ 是有理数，证明：在有理数域上

$$\begin{pmatrix}A&b\delta\\b\delta^T&b\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}I&0\\0&b-b^2\delta^TA^{-1}\delta\end{pmatrix}$$

**解：**(1) $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3+\lambda^2-3\lambda+2$

$f(\lambda)$ 的有理根只可能是 $\pm1,\pm2$，经检验 $\pm1,\pm2$，都不是它的根

故 $f(\lambda)$ 无有理根，从而在 $Q$ 上，$A$ 不能对角化

由于 $(f(\lambda),f'(\lambda))=1$，那么 $f(\lambda)$ 没有重同根，即没有重根，故在 $C$ 上可对角化；

注：若 $f(\lambda)$ 在 $C$ 上有重根，则不能判断是否可对角化，改用其他方法

$f'(\lambda)=3\lambda^2+2\lambda-3$

由 $f'(\lambda)=0$，得 $n-1$

即 $f'(\lambda)=(x+\frac{1+\sqrt{10}}{3})(x-\frac{-1+\sqrt{10}}{3})$

把 $\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{3}$ 代入 $f(\lambda)$ 都不为零,从而知 $(f(\lambda),f'(\lambda))=1$.

(2)因为 $A$ 合同于 $I$,于是∃有理数域上可逆矩阵 $P$ 使 $A=PP^T$

$$\begin{pmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ -b\delta^TA^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & b\delta\\ b^T & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -b\delta^TA^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(P^{-1})^T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & b-b^2\delta^TA^{-1}\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(P^{-1})^T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & b-b^2\delta^TA^{-1}\delta\end{pmatrix}$$

故结论成立

27. 设 $\sigma$ 是数域 $R$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个线性变换,用 $\varepsilon$ 表示,证明

$\alpha^3=\varepsilon\Leftrightarrow r(\varepsilon-\sigma)+r(\varepsilon+\sigma+\sigma^2)=n$

证明:令 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,为 $n$ 维线性空间 $V$ 的一组基

$\sigma^2,\sigma,\varepsilon$ 在这组基下的矩阵分别为 $A^2,A,E$

我们只需证明 $A^3=E\Leftrightarrow r(E-A)+r(E+A+A^2)=n$

考虑以下分块矩阵

$$\begin{pmatrix}E-A & 0\\ 0 & E+A+A^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E-A & E-A^2\\ 0 & E+A+A^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E-A & 2E+A\\ 0 & E+A+A^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}3E & 2E+A\\ E+A+A^2 & E+A+A^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3E & 2E+A\\ 0 & \frac{1}{3}(E-A^3)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E-A^3\end{pmatrix}$$

因此 $A^3=E\Leftrightarrow r(E-A)+r(E+A+A^2)=n$.

28. (1)令 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\varphi=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$,求方阵 $A=\alpha\beta^T$ 的特征多项式及特征值.

(2)设 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 为 $n$ 维实单位向量,证明 $H=I-2ww^T$ 为实际对称正交矩阵,并求 $H$ 的所有特征值.

**解**:(1)若 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$,则 $A=0$,从而 0 是 $A$ 的 $n$ 重特征根,$A$ 的特征多项式为 $\lambda^n$.

若 $\alpha\neq0$ 且 $\beta\neq0$,则 $r(A)=1$,于是 0 是 $A$ 的 $n-1$ 重特征值

$TrA=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=c$

由于 $TrA$ 等于 $A$ 的 $n$ 个特征组之和,故 $C$ 是 $A$ 的特征值

则 $A$ 的特征多项式为 $\lambda^{n-1}(\lambda-1)$

(2) $ww^T=1,H^T=(I-2ww^T)^T=I-2ww^T=H$ 则 $H$ 为实对称矩阵

$H^TH=H^2=(I-2ww^T)(I-2ww^T)=I-4ww^T+4w(ww^T)w^T=I$

因此 $H$ 是正交矩阵

令 $\lambda$ 是 $H$ 的任一特征值,则 $\exists\alpha\in r^n(\alpha\neq0)$ 使 $H\alpha=\lambda\alpha$

由 $H^2=I,H^2\alpha=\lambda^2\alpha=\alpha$,则 $\lambda^2=1$

又因 $H$ 为实对称矩阵,则 $H$ 的特征组为实数

即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

令 1 为 $H$ 的 $t$ 重特征组,则 $-1$ 为 $H$ 的 $n-t$ 重特征值

$TrH=n-2(w_1^2+w_2^2+\cdots+w_n^2)=2t-n$(由特殊的单位向量即知)

于是 $n-2=t-(n-t)=2t-n$

即 $t=n-1$

从而,1 是 $H$ 的 $n-1$ 重特征值,$-1$ 是 $H$ 的 1 重特征值

29. 设 $A,B$ 是 $n$ 阶矩阵,$AB=A+B$

(1)证明:$A,B$ 的特征根$\neq 1$

(2)设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A$ 的特征根,求 $B$ 的特征根

**证明:**(1)$(A-E)(B-E)=AB-A-B+E=E$ , 则

$(B-E)(A-E)=BA-A-B+E=E$

因此 $AB=BA$, $|A-E||B-E|=1$

因 $|A-E|\neq 0$ $|B-E|\neq 0$,则 1 是 $A,B$ 的特征值.

(2)$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,i=1,2,\cdots,n$

由 $AB=BA$,得$(BA)\alpha_i=B(A\alpha_i)=\lambda_iB\alpha_i=(AB)\alpha_i=A\alpha_i+B\alpha_i$

于是 $(\lambda_i-1)B\alpha_i=\lambda_i\alpha$

$B\alpha_i=\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i-1}\alpha_i,\alpha_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$

即 $B$ 的特征值为$\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i-1},i=1,2,\cdots,n$

30. 设 $A,B\in P^{n\times n}$,$A$ 在数域 $P$ 中有 $n$ 个不同特征值,证明:$A$ 的特征向量都是 $B$ 的特征向量 $\Leftrightarrow AB=BA$

**证明:**"$\Rightarrow$"

令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A$ 的 $n$ 个不同特征值,

则 $\xi_i=u_i\xi_i,i=1,2,\cdots,n$ ,使 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i$.

又设 $B\xi_i=u_i\xi_i$

令 $T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ ,由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关,则 $T$ 可逆.

$$T^{-1}(AB)T=T^{-1}AT\cdot T^{-1}BT=T^{-1}BT\cdot T^{-1}AT=T^{-1}(BA)T=\begin{pmatrix}\lambda_1u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_nu_n\end{pmatrix}$$

故有 $AB=BA$

"$\Leftarrow$"

$A\xi_i=\lambda_i\xi_i$, 则 $BA\xi_i=\lambda_iB\xi_i=A(B\xi_i)$.

于是 $B\xi_i$ 是 $A$ 的属于特征值 $\lambda_i$ 的特征向量或者 $B\xi_i=0$.

若 $B\xi_i=0$,则 $\xi_i$ 是 $B$ 的属于特征值 0 的特征向量;

若 $B\xi_i\neq 0$,而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异,则 $\dim V_{\lambda i}=1$,于是

$\xi_i$ 是 $V_{\lambda i}$的基,因此 $B\xi_i=u_i\xi_i$

故结论成立

31. 设 $n$ 级矩阵 $A$ 的 $n$ 个特征值互异,且 $B$ 与 $A$ 有相同的特征值

试证明:存在 $n$ 级可逆矩阵 $P$ 及 $n$ 级矩阵 $Q$ 使 $A=PQ$ 和 $B=QP$

**证明:**令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A,B$ 的 $n$ 个互异的特征值

那么存在可逆矩阵 $T_1T_2$ 使

$$T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=T_2^{-1}BT_2$$

于是 $T_2T_1^{-1}AT_1T_2^{-1}=B$

令 $AT_1T_2^{-1}=B$,则 $P^{-1}AP=B$

令 $P^{-1}A=Q$ 则 $A=PQ$ ,$B=QP$.

32. 设 $A$ 是 $n$ 个特征值互不相同的 $n$ 阶方阵,$B,C$ 是适合'$AB=BA,AC=CA$ 的两个 $n$ 级方阵,证明:$BC=CB$.

证明:令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A$ 的 $n$ 个互不相同的特征值,则 $A$ 与对角矩阵相似

令 $T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,由 $AB=BA$,则

$$T^{-1}(AB)T=T^{-1}(BA)T=T^{-1}AT\cdot T^{-1}BT=T^{-1}BT\cdot T^{-1}AT$$

令 $T^{-1}BT=B_1=(b_{ij})_{n\times n},i,j=1,2,\cdots,n$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

即 $\lambda_t b_{ij}=b_{ij}\lambda_i,i,j=1,2,\cdots,n$

当 $i\neq j$ 时 $b_{ij}=0$,于是 $B_1$ 为对角矩阵,令 $B_1=diag(u_1,u_2,\cdots,u_n)$

同理 $T^{-1}CT=C_1$ 也是对角矩阵令 $C_1=diag(k_1,k_2,\cdots,k_n)$

$T^{-1}BCT=T^{-1}BT\cdot T^{-1}CT=diag(u_1k_1,u_2k_2,\cdots,u_nk_n)$

同理 $T^{-1}(CB)T=diag(u_1k_1,u_2k_2,\cdots,u_nk_n)$

从而有 $BC=CB$.

33. 设 $A,B$ 为任意两个 $n$ 级矩阵,证明 $AB$ 与 $BA$ 有相同的特征多项式.

**证明:**$\begin{pmatrix}E & -A\\ 0 & \lambda E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \lambda E\\ E & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \lambda E-AB\\ \lambda E & \lambda B\end{pmatrix}$

两边取行列式得:$\lambda^n\begin{bmatrix}E & 0\\ -B & \lambda E\end{bmatrix}=(-1)^{n^2}\lambda^n|\lambda E-AB|$

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ -B & \lambda E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \lambda E\\ E & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & \lambda E\\ \lambda E-BA & 0\end{pmatrix}$$

两边取行列式得:$\lambda^n\begin{bmatrix}E & 0\\ -B & \lambda E\end{bmatrix}=(-1)^{n^2}\lambda^n|\lambda E-BA|$

从而 $(-1)^{n^2}\lambda^n|\lambda E-AB|=(-1)^{n^2}\lambda^n|\lambda E-BA|$

即 $|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$

34. 设 $A,B$ 是 $n$ 阶复矩阵,且 $AB=BA$,证明:

(1)$A,B$ 有公共特征向量

(2)如果 $A,B$ 都相似于对角矩阵,则存在同一可逆复方阵 $T$ 使得 $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}BT$ 同时为对

角矩阵.

**证明**:(1)设 $\lambda$ 是 $A$ 的特征值,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 $V_\lambda$ 的一组基,则 $A\alpha_i=\lambda\alpha_i,i=1,2,\cdots,s$

由 $AB=BA$ 知 $A(B\alpha_j)=B(A\alpha_j)=\lambda(B\alpha_j)$

因此 $B\alpha_j\in V_\lambda,j=1,2,\cdots,s$,令

$$B\alpha_j=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}d_{ij}\\ d_{sj}\end{pmatrix}j=1,2,\cdots,s$$

于是 $B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)D$

设 $u$ 是 $D$ 的一个特征值,$(c_1,c_2,\cdots,c_s)^T\neq 0$ 是 $D$ 的属于 $u$ 的特征向量

令　$\alpha=\alpha_1c_1+\alpha_2c_2+\cdots+\alpha_nc_s$

由 $\alpha\in V_\lambda,\alpha\neq 0$,则 $\alpha$ 是 $A$ 的属于 $\lambda$ 的特征向量

另一方面

$$B\alpha=B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}c_1\\ c_s\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)D\begin{pmatrix}c_1\\ c_s\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)u\begin{pmatrix}c_1\\ c_s\end{pmatrix}=u\alpha$$

于是结论成立

(2)对阶数 $n$ 用数学归纳法证明

($i$)当 $n=1$ 时,结论成立

($ii$)假定 $n-1$ 时结论成立

($iii$)当阶数为 $n$ 时,由(1)知 $A,B$ 存在公共的特征向量 $\alpha_1$,

因 $A$ 与对角阵相似,令 $A\alpha_j=\lambda_j\alpha_j,j=1,2,\cdots,n$

令 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, $A(B\alpha_j)=\lambda_j(B\alpha_j),j=2,\cdots,n$

因此　$B\alpha_j\in V_{\lambda_i}\subseteq V_1$

$$B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}u&0\\0&B_1\end{pmatrix}$$

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&A_1\end{pmatrix}$$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$则 $B=P\begin{pmatrix}u&0\\0&B_1\end{pmatrix}p^{-1},A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&A_1\end{pmatrix}p^{-1}$

由 $AB=BA$,则 $A_1B_1=B_1A_1$

由归纳假设,存在 $n-1$ 阶可逆矩阵 $Q_1$,使 $Q_1^{-1}A_1Q_1,Q_1^{-1}B_1Q_1$ 同时为对角阵。令

$Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&Q_1\end{pmatrix},T=PQ$ ,　则 $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}BT$ 同时为对角阵.

35. 设 $V$ 是 $n$ 维向量空间 ,$f,g$ 是 $V$ 上的线性变换(即 $f,g\in L(v)$),且 $f$ 有 $n$ 个互异的特征值,证明 $fg=gf$ 的充要条件是 $g$ 为 $f^0=\varepsilon,f,f^2,\cdots,f^{n-1}$ 的线性组合.

**证明**:"$\Leftarrow$"

若 $g$ 是 $f^0,f,\cdots,f^{n-1}$ 的线性组合,则 $fg=gf$ 是显然的.

"$\Rightarrow$"

令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $f$ 的 $n$ 个互异的特征值,则

$f(\alpha_i)=\lambda_i\alpha_i,\alpha_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $V$ 的一组基

令 $g(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B$

由于 $fg=gf$，则 $AB=BA$，于是 $B$ 为对角阵

令 $b=\begin{pmatrix} u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n \end{pmatrix}$，再令一个 $n-1$ 次多项式 $h(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$

对于方程组 $\begin{cases} a_0+a_1\lambda_1+\cdots+a_{n-1}\lambda_1^{n-1}=u_1 \\ a_0+a_1\lambda_2+\cdots+a_{n-1}\lambda_2^{n-1}=u_2 \\ \vdots \\ a_0+a_1\lambda_n+\cdots+a_{n-1}\lambda_n^{n-1}=u_n \end{cases}$

系数行列式是范德蒙行列式 $D\neq0$，因此满足

$h(\alpha_i)=u_i,i=1,2,\cdots,n$ 的这 $n$ 个条件多项式 $h(x)$ 存在

又 $f(\sigma)=0$

所以

$$g(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_n) \end{pmatrix}=h(g)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

于是 $g=h(f)$

36. 设 $\sigma$ 是属于 $P[x]$ 上线性空间 $V$ 上的线性变换，$f(x)=g(x)h(x)\in P[x]$ 是使 $f(\sigma)=0$ 的多项式，并且 $(g(x),h(x))=1$，令 $V_1=(g(\sigma))^{-1}(0),V_2=(h(\sigma))^{-1}(0)$

证明：(1) $V_1$ 与 $V_2$ 都 $\sigma$ 是一子空间.

(2) $V=V_1\oplus V_2$.

**证明**：(1) $\forall\alpha\in V_1$，$g(\sigma)\alpha=0$，从而

$g(\sigma)(\sigma(\alpha))=(g(\sigma)\sigma)\alpha=\sigma(g(\sigma)\sigma)=\sigma(0)=0$

因此，$\sigma(\alpha)\in V_1$，$V_1$ 是 $\sigma$ 一子空间

同理可知，$V_2$ 是 $\sigma$ 一子空间.

因 $(g(x),h(x))=1$，则 $\exists u(x)v(x)\in P[x]$，使

$g(x)u(x)+h(x)v(x)=1$

进而 $g(\sigma)u(\sigma)+h(\sigma)v(\sigma)=\varepsilon$ （一）

$\forall\alpha\in V_1,\alpha=\varepsilon\alpha=g(\sigma)u(\sigma)\alpha+h(\sigma)v(\sigma)\alpha$ <一>

由 $f(\sigma)=0$，于是 $h(\sigma)(g(\sigma)u(\sigma)\alpha)=0,g(\sigma)(h(\sigma)v(\sigma)\alpha)=0$

从而 $h(\sigma)(g(\sigma)u(\sigma)\alpha)\in V_2,g(\sigma)(h(\sigma)v(\sigma)\alpha)\in V_1$

因此 $V=V_1+V_2$

又 $\forall\alpha\in V_1\cap V_2$，则 $g(\sigma)\alpha=0$，且 $h(\sigma)\alpha=0$

由（一）有 $\alpha=g(\sigma)u(\sigma)\alpha+h(\sigma)v(\sigma)\alpha$

于是 $V_1\cap V_2=\{0\}$，

故 $V=V_1\oplus V_2$

37. 设 $n$ 级矩阵 $A$ 是可逆的,证明 $A$ 的逆矩阵与伴随矩阵 $A^*$ 都可以表示为 $A$ 的多项式

证明:设 $A$ 的特征多项式

$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$

由于 $A$ 可逆,则 $a_0=(-1)^n|A|\neq 0$

由哈密顿—凯莱定理

$f(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E=0$

从而 $A(A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1E)=-a_0E$

于是 $A^{-1}=-\dfrac{1}{a_0}(A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1E)$

$A^*=|A|A^{-1}=-\dfrac{|A|}{a_0}(A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1E)$

$=(^-1)n(A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1E)$

38. 设 $A$ 是 $m$ 阶方阵,$B$ 是 $n$ 阶方阵,$C$ 是 $m\times n$ 阶方阵,证明:$AX+XB=C$ 有唯一解当且仅当 $\lambda_i+\mu_j\neq 0$,其中 $\lambda_i,\mu_j$ 分别为 $A,B$ 的任一特征根。

证明:要证本题只要证明 $AX+XB=0$ 只有零解当且仅当 $\lambda_i+\mu_j\neq 0$ 即可.

设

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_S\end{pmatrix}=J,\ Q^{-1}PQ=\begin{pmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_K\end{pmatrix}=M$$

分别是 $A$ 与 $B$ 的若当标准形。

若 $AX+XB=0$,即 $PJP^{-1}X=-XQMQ^{-1}$,令 $X_1=P^{-1}XQ$,则 $X=PX_1Q^{-1}$ 于是 $JX_1=-X_1M$,将 $X_1$ 分块使与 $J,M$ 可乘,令 $X_1=(X_{\alpha\beta}),\alpha=1,2,\cdots,s,\beta-1,2,\cdots,k,X_{\alpha\beta}$为 $p_\alpha\times p_\beta$ 矩阵,$p_\alpha,p_\beta$ 分别为 $J,M$,中对应的若当块的阶数,因而 $A_a=\lambda_aI_{pa}+H_{pa},B_\beta=\mu_\beta=\mu_\beta I_{a\mu}+H_{qp}$ 其中 $H_{pa},H_{ap}$,分别为形如

$$\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}$$

的矩阵

由 $AX+XB=0$,得 $(\lambda_aI_{pa}+H_{pa})X_{\alpha\beta}=-X_{\alpha\beta}(\mu_\beta I_{q\beta}+H_{q\beta})$

即 $(\lambda_a+\mu_\beta)X_{\alpha\beta}=-(H_{pa}X_{\alpha\beta}+X_{\alpha\beta}H_{q\beta})$,

从而 $(\lambda_a+\mu_\beta)^rX_{\alpha\beta}=(-1)r\sum\limits_{a+r=\gamma}C_r^0H_\beta^0X_{\alpha\beta}H_{q\beta}^1.$

但 $H_{pa}^{aa}=0,H_{q\beta}^{\alpha\beta}=0$,取 $r\geqslant p_a+q_\beta$,则 $\sigma\geqslant p_a$ 或 $\tau\geqslant q_\beta$,从而 $H_{pa}^{a}=0$ 或 $H_{qp}^{r}=0$,即 $(\lambda_a+\mu_\beta)^\gamma X_{\alpha\beta}-0$,由于 $\lambda_a+\mu_\beta\neq 0$,故 $X_{\alpha\beta}=0$,即 $AX+XB=0$ 有唯一零解。

反之,若 $AX+XB=0$ 只有零解,则 $JX_1+X_1M=0$ 只有零解,从而必有 $\lambda_a+\mu_\beta\neq=$,否则,若 $\lambda_a+\mu_\beta=0$,则由 $(\lambda_a+\mu_\beta)X_{\alpha\beta}=-(H_{pa}X_{\alpha\beta}+X_{\alpha\beta}H_{q\beta})$ 直接解矩阵方程可得 $X_{\alpha\beta}\neq 0$

# 第七章　多项式与矩阵

## §1 多项式

1. 数域：

(1)设 $P$ 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1. 如果 $P$ 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍然是中的数，那么 $P$ 就称为一个数域.

(2)如果一个包含 0,1 在内的数集 $P$ 对于加法、减法、乘法与除法(除数不为零)是封闭的，那么 $P$ 就称为一个数域.

性质：所有的数域都包含有理数域作为它的一部分(有理数域是最小的数域).

2. 一元多项式：

设 $n$ 是一非负整数，形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{1}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$，称为数域 $P$ 上的一元多项式. 其中，$a_ix^i$ 称为 $i$ 次项，$a_i$ 称为 $i$ 次项的系数. 如果 $a_n\neq 0$，那么 $a_nx^n$ 称为多项式(1)的首项，$a_n$ 称为首项系数，$n$ 称为多项式(1)的次数. 多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\partial(f(x))$.

注：(1)系数全为零的多项式称为零多项式，记为 0.

(2)零多项式是唯一不定义次数的多项式.

(3) $\partial(f(x)+g(x))\leqslant\max\ (\partial(f(x)),\partial(g(x)))$，$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$

上面的结果都可以推广到多个多项式的情形.

3. 整除：如果有数域 $P$ 上的多项式 $h(x)$ 使等式 $f(x)=g(x)h(x)$ 成立，则称多项式 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 或者称 $f(x)$ 被 $g(x)$ 整除，用"$g(x)\mid f(x)$"表示；用"$g(x)\nmid f(x)$"表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，或者称 $f(x)$ 不能被 $g(x)$ 整除.

4. 最大公因式：$P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式，

(1)如果它满足下面两个条件：

1) $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式；

2) $f(x)$，$g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式.

(2)如果它满足下面两个条件：

1) $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式；

2)有 $P[x]$ 中多项式 $u(x)$，$v(x)$ 使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

$P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$，$g(x)$ 称为互素(也称为互质)的，如果

5. 互素：若两个多项式除去零次多项式外没有其他的公因式. 即 $(f(x),g(x))=1$.

6. 不可约多项式(irreducible polynomical)：数域 $P$ 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $p(x)$ 如果不能表成数域 $P$ 上的两个次数比 $p(x)$ 的次数低的多项式的乘积.

7. 重因式：不可约多项式 $p(x)$ 如果满足 $p^k(x) \mid f(x)$，但 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$，则称为多项式 $f(x)$ 的 $k$ 重因式，

8. 最小多项式：次数最低的首项系数为 1 的以 $A$ 为根的多项式称为 $A$ 的最小多项式.

带余除法 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，其中 $g(x) \neq 0$，一定有 $P[x]$ 中的多项式 $q(x), r(x)$ 存在，使

$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$

成立，其中 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 或者 $r(x) = 0$，并且这样的 $q(x), r(x)$ 是唯一决定的.

**定理 1** $P[x]$ 中两个多项式 $f(x), g(x)$ 互素的充要条件是有 $P[x]$ 中多项式 $u(x), v(x)$，使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$.

$(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)) = ((f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{s-1}(x)), f_s(x))$

**定理 2** 如果不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的一个 $k(k \geqslant 1)$ 重因式，那么 $p(x)$ 是微商 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

**定理 3** 不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的一个因式，若 $p(x)$ 是微商 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式，则 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的一个 $k(k \geqslant 1)$ 重因式.

**推论 1** 如果不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的一个 $k(k \geqslant 1)$ 重因式，那么 $p(x)$ 是 $f(x)$，$f'(x), \cdots, f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

**推论 2** 不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的重因式的充要条件是 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

**推论 3** 多项式 $f(x)$ 没有重因式 $\Leftrightarrow (f(x), f'(x)) = 1$

**定理 4**（余数定理）用一次多项式去除多项式 $f(x)$，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$.

如果 $f(x)$ 在 $x = \alpha$ 时函数值 $f(\alpha) = 0$，那么 $\alpha$ 就称为 $f(x)$ 的一个根或零点.

由余数定理得到根与一次因式的关系.

**推论** $\alpha$ 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x - \alpha) \mid f(x)$.

**定理 5** $P[x]$ 中 $n$ 次多项式 $(n \geqslant 0)$ 在数域 $P$ 中的根不可能多于 $n$ 个，重根按重数计算.

**定理 6** 如果多项式 $f(x), g(x)$ 的次数都不超过 $n$，而它们对 $n+1$ 个不同的数有相同的值，即 $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$，则 $f(x) = g(x)$.

**代数基本定理** 每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中有一个根. 即每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域上一定有一个一次因式.

**复系数多项式因式分解定理** 每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

**实系数多项式因式分解定理** 每个次数 $\geqslant 1$ 的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与含一对非实共轭复数根的二次因式的乘积. 实数域上不可约多项式，除一次多项式外，只有含非实共轭复数根的二次多项式.

**定理 7** （Gauss 引理）两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

**定理 8** 设 $f(x), g(x)$ 是整系数多项式，且 $g(x)$ 是本原多项式，如果

$f(x) = g(x)h(x)$，其中 $h(x)$ 是有理系数多项式，那么 $h(x)$ 一定是整系数多项式.

**定理 9** 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$

是一个整系数多项式. 而 $\frac{r}{s}$ 是它的一个有理根，其中 $r, s$ 互素，那么

(1)$s|a_n, r|a_0$；特别如果$f(x)$的首项系数$a_n=1$，那么$f(x)$的有理根都是整根，而且是$a_0$的因子.

(2) $f(x)=(x-\frac{r}{s})q(x)$,

其中$q(x)$是一个整系数多项式.

**定理** 10(艾森斯坦(Eisenstein)判别法) 设

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

是一个整系数多项式. 若有一个素数$p$，使得

1. $p\nmid a_n$;

2. $p|a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0$;

3. $p^2\nmid a_0$.

则多项式$f(x)$在有理数域上不可约.

**综合除法**

根据余数定理，要求$f(x)$当$x=c$时的值，只需用带余除法求出用$x-c$除$f(x)$所得的余式. 但是还有一个更简便的方法，叫做综合除法.

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$g(x)x-c$

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_n & a_0 \\ & & ca_n & cb_{n-1} & \cdots & cb_2 & cb_1 \\ \hline & a_n & b_{n-1} & b_{n-2} & & b_1 & b_0 \end{array}$$

则$g(x)=a_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\cdots+b_2x+b_1$

$r(\times)=b_0$

表中的加号通常略去不写.

**例** 1　用$x+3$除$f(x)=x^4+x^2+4x-9$.

**例** 2　求$k$使$f(x)=x^4-5x^3+5x^2+kx+3$能被$x-3$整除

注：若$f(x)$缺少某一项，在作综合除法时该项系数的位置要补上零.

拉格朗日插值公式

已知次数$\leqslant n$的多项式$f(x)$在$x=c_i(i=1,2,\cdots,n+1)$的值为

$f(c_i)=b_i(i=1,2,\cdots,,n+1)$.

设$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}k_i(x-c_1)\cdots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\cdots(x-c_{n+1})$

依次令$x=c$代入$f(x)$，得

$$k_i=\frac{b_i}{(c_i-c_1)\cdots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\cdots(c_i-c_{n+1})}$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_i(x-c_1)\cdots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\cdots(x-c_{n+1})}{(c_i-c_1)\cdots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\cdots(c_i-c_{n+1})}$$

这个公式叫做拉格朗日(*Lagrange*)插值公式.

**例** 3　求次数小于3的多项式$f(x)$，使

$f(1)=1, f(-1)=3, f(2)=3$.

所谓$n$次多项式$f(x)$表成$x-\alpha$的方幂和，就是把$f(x)$表示成

$f(x)=b_n(x-\alpha)^n+b_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}+\cdots+b_1(x-\alpha)+b_0$

的形式. 如何求系数 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$，把上式改写成

$f(x)=[b_n(x-\alpha)^{n-1}+b_{n-1}(x-\alpha)^{n-2}+\cdots+b_1](x-\alpha)+b_0$，

就可看出 $b_0$ 就是 $f(x)$ 被 $x-\alpha$ 除所得的余数，而

$q_1(x)=b_n(x-\alpha)^{n-1}+b_{n-1}(x-\alpha)^{n-2}+\cdots+b_1$

就是 $f(x)$ 被 $x-\alpha$ 除所得的商式. 又因为

$q_1(x)=[b_n(x-\alpha)^{n-2}+b_{n-1}(x-\alpha)^{n-3}+\cdots+b_2](x-\alpha)+b_1$.

又可看出 $b_1$ 是商式 $q_1(x)$ 被 $x-\alpha$ 除所得的余式，而

$q_2(x)=b_n(x-\alpha)^{n-2}+b_{n-1}(x-\alpha)^{n-3}+\cdots+b_3(x-\alpha)+b_2$.

就是 $q_1(x)$ 被 $x-\alpha$ 除所得商式. 这样逐次用 $x-\alpha$ 除所得的商式，那么所得的余数就是 $b_0$，$b_1,\cdots,b_{n-1},b_n$.

**例 4**　将 $f(x)=(x-2)^4+2(x-2)^3-3(x-2)^2+(x-2)+5$ 展开成 $x$ 的多项式.

解　令 $y=x-2$，则 $x=y+2$. 于是

$f(y+2)=y^4+2y^3-3y^2+y+5$.

问题变为把多项式 $y^4+2y^3-3y^2+y+5$ 表成 $y+2$(即 $x$)的方幂和，

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −2 \| | 1 | 2 | −3 | 1 | 5 |
| +) | | −2 | 0 | 6 | −14 |
| −2 \| | 1 | 0 | −3 | 7 | \| −9 |
| +) | | −2 | 4 | −2 | |
| −2 \| | 1 | −2 | 1 | \| 5 | |
| +) | | −2 | 8 | | |
| −2 \| | 1 | −4 | \| 9 | | |
| +) | | −2 | | | |
| 1 \| | −6 | | | | |

所以　$f(x)=x^4-6x^3+9x^2+5x-9$.

**注**　将 $f(x)$ 表成 $x-\alpha$ 的方幂和，把 $\alpha$ 写在综合除法的左边，将 $x-\alpha$ 的方幂和展开成 $x$ 的多项式，那么相当于将 $f(x)$ 表成 $(x-c)+c$ 的方幂和，要把 $-c$ 写在综合除法的左边.

**性质**

1. 任一多项式 $f(x)$ 一定整除它自身.
2. 零多项式只能整除零多项式，但任一多项式 $f(x)$ 都能整除零多项式 0.
3. 零次多项式，即非零常数，能整除任一个多项式.
4. 若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)=cg(x)$，其中 $c$ 为非零常数.
5. 若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$(整除的传递性).
6. 若 $f(x)\mid g_i(x)$，$i=1,2,\cdots,r$，则

$f(x)\mid(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x))$，

其中 $u_i(x)$ 是数域 $P$ 上任意的多项式.

7. 如果$(f(x),g(x))=1$，且$f(x)\mid g(x)h(x)$，那么$f(x)\mid h(x)$.

8. 如果$f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x)$，且$(f_1(x),f_2(x))=1$，那么$f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

9. 如果$(f_1(x),g(x))=1,(f_2(x),g(x))=1$，那么$(f_1(x)f_2(x),g(x))=1$

10. 设$f,g$是多项式，若$(f,g)=1$，则$(f+g,fg)=1$.

11 若多项式$h(x)\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，$h(x)$与$f_1(x),\cdots,f_{i-1}(x),f_{i+1}(x),\cdots,f_s(x)$互素，则$h(x)\mid f_i(x)(1\leqslant i\leqslant s)$.

12. 若多项式$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$都整除$h(x)$，且$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$两两互素，则$f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)\mid h(x)$.

13. 若多项式$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$都与$h(x)$互素，则$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x),h(x))=1$

14. $p(x)$是不可约多项式，对于任意的两个多项式$f(x),g(x)$，由$p(x)\mid f(x)g(x)$一定推出$p(x)\mid f(x)$或者$p(x)\mid g(x)$.

15. 对于不可约多项式$p(x)$，若$p(x)$ $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$，则$p(x)$一定整除这些多项式之中的一个.

16. 若$f(x)$的各项系数同号，则$f(x)$无正根.

17. 若多项式$f(x)$的奇次项和偶次项符号相反，则$f(x)$无负根.

18. 实系数多项式$f(x)$的正根个数等于它的系数的变号数，或较系数的变号数多一个偶数.

19. 奇次实系数多项式至少有一个实数根.

20. 实系数多项式的实根个数与其次数有相同的奇偶性

**注** (1)两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变.

(2)对于任意多项式$f(x)$，$f(x)=(f(x),0)$；特别地，两个零多项式的最大公因式就是0.

(3)带余除法中必须$g(x)\neq 0$，但$g(x)\mid f(x)$中，$g(x)$可以为零，当$g(x)\mid f(x)$时，如$g(x)\neq 0$，$g(x)$除$f(x)$的商$q(x)$有时也用$\dfrac{f(x)}{g(x)}$来表示.

(4)两个多项式$f(x)$与$g(x)$必然存在最大公因式，且最大公因式是$f(x)$与$g(x)$的组合；反之，若$d(x)$是$f(x),g(x)$的一个组合，但$d(x)$不一定是$f(x),g(x)$的一个最大公因式. 例如令

$f(x)=x,g(x)=x+1$，

则 $x(x+2)+(x+1)(x-1)=2x^2+2x-1$.

但$2x^2+2x-1$显然不是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式.

(5)如果$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))=1$，那么$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$就称为互素的，但并不代表两两互素. 例

$f_1(x)=x^2-3x+2,f_2(x)=x^2-5x+6,f_3(x)=x^2-4x+3$是互素的，

但$(f_1(x),f_2(x))=x-2$.

(6)一次多项式总是不可约多项式，但在复数域上不可约多项式只有一次多项式.

(7)一个多项式是否可约是依赖于系数域的.

(8)不可约多项式$p(x)$与任一多项式$f(x)$之间只可能有两种关系，或者

$p(x)\mid f(x)$或者$(p(x),f(x))=1$

(9)不可约多项式$p(x)$是多项式$f(x)$的$k$重因式的充要条件是存在多项式$g(x)$，使得$f(x)=p^k(x)g(x)$，且$p(x)\mid g(x)$.

(10)在重因式中，如果$k=0$，$p(x)$不是$f(x)$的因式；如果$k=1$，$p(x)$称为$f(x)$的单因式；如果$k>1$，$p(x)$称为$f(x)$的重因式，$k$重因式和重因式是两个不同的概念，而且重因式不因系数

域的扩大而改变.

(11)如果$(x-\alpha)$是$f(x)$的$k$重因式. 当$k=1$时,$\alpha$称为单根;当$k>1$时,$\alpha$称为重根.

(12)多项式$f(x)$有重根,则定有重因式;但$f(x)$有重因式,未必有重根.

(13)如果$\alpha$是实系数多项式$f(x)$的复根,那么$\alpha$的共轭数$\bar{\alpha}$也是$f(x)$的根,并且$\alpha$与$\bar{\alpha}$有同一重数. 即实系数多项式的非实的复数根两两成对.

## §2 多项式与矩阵

1. 形如:

$$a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

的式子称为方阵$A$的多项式.

2. 次数不超过$m$的$n$阶$\lambda$矩阵$B(\lambda)$总可写为

$$B(\lambda)=B_m\lambda^m+B_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+B_1\lambda+B_0$$

其中,$B_i(i=0,1,\cdots,m)$为$n$阶常系数矩阵,称该式为$\lambda$矩阵$B(\lambda)$的多项式写法.

3. 设$A$为$n$阶矩阵,如存在多项式$\varphi(\lambda)$使得$\varphi(A)=0$,则称$\varphi(\lambda)$为$A$的化零多项式.

4. $n$阶矩阵$A$的所有化零多项式中,次数最低且首相系数为的多项式称为$A$的最小多项式,记为$m(\lambda)$.

5. 对数域$P$上的一个多项式

$$d(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$$

称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}$$

为多项式$d(\lambda)$的伴侣阵

6. 下列准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix},\tag{6}$$

其中$A_i$分别是数域$P$上某些多项式$d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$的伴侣阵,且满足$d_1(\lambda)\mid d_2(\lambda)\mid\cdots\mid d_s(\lambda)$,$A$就称为$P$上的一个有理标准形矩阵.

**定理1**　(Cayley-Hamilton)定理 设$A$为$n$阶矩阵,$f(\lambda)$是$A$的特征多项式,则$f(A)=0$.

**定理2**　多项式$\varphi(\lambda)$为矩阵$A$的化零多项式的充要条件是$A$的最小多项式$m(\lambda)\mid\varphi(\lambda)$. 特别地,有$m(\lambda)\mid f(\lambda)$,即$A$的最小多项式为其特征多项式的因式.

**定理3**　相似矩阵有相同的最小多项式.

**定理4**　$n$阶矩阵$A$的最小多项式等于它的特征矩阵$\lambda E-A$中的第$n$个不变因子.

**推论1**　方阵$A$的特征多项式的根必是其最小多项式的根.

**推论2**　若矩阵$A$的特征多项式的根互异,则它的最小多项式就是特征多项式.

**定理5** 设$g(x)$是矩阵$A$的最小多项式,那么$f(x)$以$A$为根的充要条件是$g(x)$整除$f(x)$.

**定理6** $k$级若尔当块

$$J=\begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}$$

的最小多项式为$(x-a)^k$.

**定理7** $n$阶矩阵$A$相似于对角矩阵的充要条件为$A$的最小多项式$m(\lambda)$没有重零点.

**定理8** 数域$P$上$n$级矩阵$A$与对角矩阵相似的充要条件为$A$的最小多项式是$P$上互素的一次因式的乘积.

**推论** 复数矩阵$A$与对角矩阵相似的充要条件是$A$的最小多项式没有重根.

**定理9** 设$A$是一个准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix},$$

并设$A_1$的最小多项式为$g_1(x)$,$A_2$的最小多项式为$g_2(x)$,那么$A$的最小多项式为$g_1(x)$,$g_2(x)$的最小公倍式$[g_1(x),g_2(x)]$.

**推论** 如果

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

$A_i$的最小多项式为$g_i(x)$,$i=1,2,\cdots,s$,那么$A$的最小多项式为$[g_1(x),g_2(x),\cdots,g_s(x)]$

定理10 如果多项式$f_1(\lambda)$,$f_2(\lambda)$都与$g_1(\lambda)$,$g_2(\lambda)$互素,则.

$(f_1(\lambda)g_1(\lambda),f_2(\lambda)g_2(\lambda))=(f_1(\lambda),f_2(\lambda))\cdot(g_1(\lambda),g_2(\lambda))$.

定理11 设

$$A(\lambda)=\begin{vmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{vmatrix},$$

$$B(\lambda)=\begin{vmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{vmatrix},$$

如果多项式$f_1(\lambda)$,$f_2(\lambda)$都与$g_1(\lambda)$,$g_2(\lambda)$互素,则$A(\lambda)$和$B(\lambda)$等价.

例:证明:幂等矩阵$A$一定相似于对角矩阵.

证明:$A$为幂等矩阵,则$A^2=A$,从而

$A$的化零多项式$\varphi(\lambda)=\lambda^2-\lambda$,

那么,$A$的最小多项式$m(\lambda)\mid\varphi(\lambda)$.

因 $\varphi(\lambda)=0$没有重根,

故 $m(\lambda)=0$也没有重根.

于是,

$A$相似于对角矩阵.

# 自测题

**一、填空题**(每小题 3 分,共 15 分)

1. $f(x)=x^4-4x^3-1$, $g(x)=x^2-3x-1$. 则 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的商式为________,余式为________.

2. $f(x),g(x),u(x),v(x)\in F[x]$,若 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=2$,则 $(f(x),g(x))=$ ________, $(u(x),v(x))=$ ________.

3. $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$ 且 $a_n\neq0$, $f(x)\mid g(x)$ 则 $(f(x),g(x))=$ ________.

4. $x^2+2$, $(x-1)(x+3)$, $0$, $2x+4$, $x^3-1$ 中是本原多项式的为________.

5. $f(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3^2-4x_1x_3+x_1^3-2x_1x_2x_3+6x_2^2-x_1^2x_3$ 按字典排列法可写成________________.

**二、判断说明题**(先判断正确与错误,再简述理由,每小题 5 分,共 20 分)

1. 若 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$,则 $d(x)$ 必为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

2. 若 $p(x)\mid f(x)g(x)$, $p(x)$ 在 $F$ 上不可约,且 $p(x)\mid[f(x)+g(x)]$ 则 $p(x)\mid f(x)$ 且 $p(x)\mid g(x)$.

3. 设 $p(x)$, $f(x)$ 为 $F$ 上的多项式,且 $p(x)$ 不可约. 若 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 $k$ 重因式,则 $p(x)$ 必为 $f'(x)$ 的 $k+1$ 重因式.

4. 有理系数多项式 $f(x)$ 在 $Q$ 上可约,则 $f(x)$ 有有理根.

**三、计算题**(每小题 15 分,共 45 分)

1. 设 $f(x)=x^4-x^3-x^2+2x-1$, $g(x)=x^3-2x+1$,求 $(f(x),g(x))$ 以及 $u(x),v(x)$,使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

2. 设 $f(x)=x^5-x^3+4x^2-3x+2$

(1) 判断 $f(x)$ 在 $R$ 上有无重因式? 如果有,求出所有的重因式及重数;

(2) 求 $f(x)$ 在 $R$ 上的标准分解式.

3. (1) 把 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$ 表示为初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式. (2) 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $x^3-x^2-4x+1=0$ 三个根,求 $\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3^2$ 的值.

**四、证明题**(每小题 10 分,共 20 分)

1. 设 $k\geqslant2$ 为正整数,证明: $f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow f^k(x)\mid g^2(x)$.

2. 设 $f(x)$ 是整系数多项式, $a$ 为整数,证明: $(5-a)\mid f(5)\Leftrightarrow(5-a)\mid f(a)$.

# 典型例题解析

1. 求多项式的有理根.

① $x^3-6x^2+15x-14$

**解**:可能的有里根为: $\pm1$, $\pm2$, $\pm7$, $\pm14$,

经验证 $x=2$ 为有理根.

② $f(x)=x^5-x^4-\frac{5}{2}x^3+2x^2-\frac{1}{2}x-3$ (分析化为整系数多项式)

$=2(x^5-2x^4-5x^3+4x^2-x-6)$

可能的有理根为 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6.$,

经验证无有理根.

2. 下列有理数在有理数城上是否可约.

①$x^4-8x^3+12x^2+2$（提示:取 $P=2$,用艾森斯坦判别出不可约）

②$x^6+x^3+1$ $(\partial(f(x))=6$ 是偶函数,令 $x=y+1)$

**解**:令 $x=y+1$,代入 $f(x)=x^6+x^3+1$,得:

$g(y)=f(y+1)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$,

取 $p=3$ 爱森斯坦判别出不可约.

③$x^p+px+1$,$P$ 为奇素数,$(\partial f(x)=p$ 为奇素数,令 $x=y-1)$

解:$g(y)=f(y-1)=y^p-c_p^1y^{p-1}+c_p^2y^{p-2}-\cdots-c_p^{p-2}y^2+(c_p^{p-1}+p)y-p$

取素数为 $p$,知不可约.

④设 $p$ 是一个素数,多项式

$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$

叫做一个分圆多项式,证明 $f(x)$ 在 $Q[x]$ 中不可约.

证明:令 $x=y+1$,则由于

$(x-1)f(x)=x^p-1$,

$yf(y+1)=(^y+1)p-1$

$=y^p+C_p^1y^{p-1}+\cdots+C_p^{p-1}y'$

令 $g(y)=f(y+1)$,于是

$g(y)=y^{p-1}+C_p^1y^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}$,

由艾森斯坦判断法,$g(y)$ 在有理数域上不可约,$f(x)$ 也在有理数域上不可约.

3. 如果 $f(x),g(x)$ 不全为零,证明:$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$

**证明**:设 $d(x)=(f(x),g(x))$,

因为 $f(x),g(x)$ 不全为零,故 $d(x)\neq0$

对于 $d(x)$,$\exists u(x),v(x)$,使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$

从而,$\frac{f(x)}{(f(x).g(X))}\cdot u(x)+\frac{g(x)}{(f(x).g(x))}\cdot v(x)=1$

又 因 $d(x)\mid f(x)$, $d(x)\mid q(x)$,则

$\left(\frac{f(x)}{(f(x).q(x))}.\frac{q(x)}{(f(x).q(x))}\right)=1$

4. 假设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首相系数为 1 的互异多项式. 假设:$x^4+x^2+1$ 整除 $f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$,试求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式.

**解**:由于 $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

则它的 4 个根分别为:$\omega_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\omega_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\omega_3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\omega_4=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

因为 $x^4+x^2+1/f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$,

故:$\begin{cases}f_1(1)+\omega_1f_2(1)=0\\f_1(1)+\omega_2f_2(1)=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}f_1(-1)+\omega_3f_2(-1)=0\\f_1(-1)+\omega_4f_2(-1)=0\end{cases}$

解得 $f_1(1)=f_2(1)=0.$ $f_1(-1)=f_2(-1)=0.$

于是有. $(x+1)(x-1)/f_1(x)$,$(x+1)(x-1)/f_2(x)$,

又因$f_1(x)$与$f_2(x)$为次数不超过3的首项系数为1的多项式.

从而有$(f_1(x),f_2(x))=x^2-1$

5. 设$f_n(x)=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}$,证明:对任意的非负整数$n$,$(x^2+x+1,f_n(x))=1$.

**证明:** $x^2+x+1$是有理数域上的不可约多项式,则

$x^2+x+1/f_n(x)$ 或$(x^2+x+1,f_n(x))=1$

若　$x^2+x+1/f_n(x)$,令$\varepsilon$是3次本原单位根,则

$\varepsilon^3=1,\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$,且$f_n(\varepsilon)=0$

但 $f_n(\varepsilon)=\varepsilon^{n+2}-(^{\varepsilon}+1)2n+1=\varepsilon^{n+2}-(^{-}\varepsilon^2)2n+1=\varepsilon^{n+2}+\varepsilon^{4n+2}$

$=\varepsilon^{n+2}(1+\varepsilon^{3n})=2\varepsilon^{n+2}\neq0$

故导出矛盾,于是

$(x^2+x+1,f(x))=1.$

练习 1. 设为任意三个非负整数,试证$x^2+x+1/x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$.

2. 设$x^n-1/(x-1)[f_1(x^n)+xf_2(x^n)+x^2f_3(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n)](n\geqslant2)$

求证:$x-1/f_i(x)$　$(i=1,2\cdots n-1)$

6. 设$m,n$是两个正整数,$f(x)=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1,g(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$,

证明:$(f(x).g(x))=1$,当且仅当$(m.n)=1$.

**证明:**只要证明$(x^m-1,x^n-1)=x-1\Leftrightarrow(m,n)=1$,

(因为$x^m-1=(x-1)f(x)$, $x^n-1=(x-1)q(x)$)

这里证明更为一般的结论:$(x^m-1,x^n-1)=x^{(m,n)}-1$.

(不妨假设$m\geqslant n$)

令　$(m,n)=d$,有整数的带余除法,有:

$m=q_1n+r_1$,　$0\leqslant r_1<n$

$n=q_2r_1+r_2,0\leqslant r_2<r_1$

$r_1=q_3r_2+r_30\leqslant r_3<r_2$

$r_{k-1}=q_{k+1}r_k$

$s$ 则有$(m,n)=r_k$,　即$d=r_k$　进而

$(x^m-1,x^n-1)=(x^{nq_1+r_1}-1,x^n-1)$

$=((x^{nq_1}-1)x^{r_1}+x^{r_1}-1,x^n-1)$　$=((x^n-1)g(x)+x^{r_1}-1,x^n-1)$　①

$=(x^n-1,x^{r_1}-1)$　②

类似地,有$(x^n-1,x^{r_1}-1)=(x^{r_1}-1,x^{r_2}-1)=\cdots$

$=(x^{r_{k-1}}-1,x^{r_k}-1)=x^{r_k}-1$

$=x^d-1=x^{(m,n)}-1$

即　$(x^m-1,x^n-1)=x^{(m,n)}-1$.

注:①$x^{nq_1}-1=(x^n)^{q_1}-1=(x^n-1)h(x)$

②辗转相除法　令$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ 则$(f(x),g(x))=(q(x),r(x))$

7. 设$a_1,a_2\cdots a_n$是互异的整数,则多项式$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$不能分解成两个次数都大于0的整系数多项式的乘积.

**证明:**(反证法)

设　$f(x)=g(x)h(x)$,其中$0<\theta(g(x))<n$, $0<\alpha(h(x))<n$,且

$g(x),h(x)$均为整系数的多项式,

因　$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$,

从而有 $f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=-1$ 其中 $i=1,2\cdots n$

因 $g(x).h(x)$ 为整系数多项式,则

$g(a_i)$, $h(a_i)$ 都是整数.

从而有 $g(a_i)=1$, $h(a_i)=-1$ 或 $g(a_i)=-1,h(a_i)=1$

于是 $h(a_i)+g(a_i)=0$,

这就说明 $a_1,a_2\cdots a_n$ 为 $g(x)+h(x)$ 的 $n$ 个互不相同的根,

下面证明 $h(x)+g(x)=0$

若 $h(x)+g(x)\neq 0$ 知 $\partial(h(x)+g(x))<\partial(f(x))=n$

这与 $f(x)+g(x)$ 有 $n$ 个互不相同的根矛盾,

从而 $h(x)+g(x)=0$

于是 $f(x)=-g^2(x)=-h^2(x)$,其中 $-h^2(x)$ 或 $-g^2(x)$ 首项系数为负,

而 $f(x)$ 的首相系数为 1,矛盾.

故 $f(x)$ 不能分解成两个次数都大于零的整系数多项式的乘积.

8. $a_1,a_2\cdots a_n$ 是不同的整数,证明 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1$ 在有理数域上不可约或是某一有理系数多项式的平方.

**证明:** 若 $f(x)$ 在有理数域上不可约,则结论成立,.

若 $f(x)$ 在有理数域上可约, $f(x)$ 是整系数多项式,则 $f(x)$ 可以分解成两个次数比他低的多项式乘积,

从而 $f(x)$ 可以分解成两个次数比它低的整系数多项式的乘积,

令 $f(x)=f_1(x)f_2(x),\alpha(f_1(x))<n,,\alpha(f_2(x))<n$

由于 $f(a_i)=1,i=1,2\cdots n$ 则 $f_1(a_i)f_2(a_i)=1$

又 $f_1(a_i)$ 与 $f_2(a_i)$ 均为整数

于是 $f_1(a_i)=f_2(a_i),i=1,2\cdots n$

那么 $f_1(x)=f_2(x)$

故 $f(x)=f_1^2(x)$.

9. 设 $f(x)$ 是整系数多项式,若 $g(x)=f(x)+1$ 至少有三个互不相等的整数根,证明 $f(x)$ 没有整数根.

**证明:**(反证法)假设 $f(x)$ 有整数根 $m$,则 $f(x)=(x-m)h(x)$

由于 $x-m$ 是本原多项式,所以 $h(x)$ 是整系数多项式,

令 $n_1,n_2,n_3n_1$ 是 $g(x)$ 的三个互不相等的整数根,则

$g(x)=(x-n_1)\ (x-n_3)p(x)$

其中 $p(x)$ 是整系数多项式,进而

$g(m)=f(m)+1=1=(m-n_1)(m-n_2)(m-n_3)p(m)$

于是 $m-n_1$, $m-n_2,m-n_3,p(m)$ 只能是 1 或 $-1$,

那么

$m-n_1,m-n_2,m-n_3$ 当中至少有两个同为 1,或同为 $-1$,

这与 $n_1,n_2,n_3$ 互不相等矛盾,所以 $f(x)$ 没有整数根.

10. 求以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为根的有理系数不可约多项式 $f(x)$

**解:** $[(x-\sqrt{2})-\sqrt{3}][(x-\sqrt{2})+\sqrt{3}]=x^2-2\sqrt{2}-1$

$[(x^2-1)-2\sqrt{2}x][(x^2-1)+2\sqrt{2}x]=x^4-10x^2+1=f(x)$

由于 $f(\pm 1)\neq 0$,于是 $f(x)$ 不能表示成一个一次与一个三次的有理系数多项式的乘积.

若$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，其中$f_1(x)f_2(x)\in\theta[x]$，且$\alpha(f_1(x))=\alpha(f_2(x))=2$

此分解当然也可以看做是实数域上的分解.

由$f(x)$在实数域上分解的唯一性，知

$f_1(x)=x^2-2\sqrt{2}x-1, f_2(x)=x^2+2\sqrt{2}x-1,$

这显然矛盾，故

$f(x)$再有理数域上不可约.

11. 设$f(x)$是有理数域$Q$上的一个$m$次多项式$(m\geqslant 0)$，$n$是大于$m$的正整数，证明：$\sqrt[n]{2}$不是$f(x)$的实根.

**证明：**假设$\sqrt[n]{2}$是$f(x)$的实根，而$\sqrt[n]{2}$是有理数域上的不可约多相式$x^n-2$的一个根，那么$(x^n-2,f(x))=1$或者$x^n-2/f(x)$.

若$(x^n-2,f(x))=1$，则$\exists u(x),v(x)$使

$(x-2)u(x)+f(x)v(x)=1$

于是　$[(\sqrt[n]{2})^n-2]u(\sqrt[n]{2})+f(\sqrt[n]{2})v(\sqrt[n]{2})=1$ 矛盾

所以　$x^n-2/f(x)$，这与$n>m$矛盾

故$\sqrt[n]{2}$不是$f(x)$的根.

12. 证明多项式$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$在有理数域上不可约，其中$p$为一素数.

**证明：**由于

$p!\,f(x)=p!\;+p!\,x+3\cdots+(p-1)px^2+4\cdots(p-1)px^3+\cdots px^{p-1}+x^p,$

可知存在素数$p$使得

$(i)p$不整除1

$(ii)p/p,\cdots,4\cdots(p-1)p,3\cdots(p-1)p,\cdots,p!,p$

$(iii)p^2$不整除$p!$

由爱森斯坦判别出$p!\,f(x)$在有理数域上不可约，于是

$f(x)$在有理数域上不可约.

13. 试求7次多项式$f(x)$，使$f(x)+1$能被$(x-1)^4$整除.

**解：**$(x-1)^4/(f(x)+1)$，则1为$f(x)+1$的4重根，从而1为$f'(x)$的3重根

同理，$-1$为$f'(x)$的3重根

因为$\partial(f(x))=7$，故$\partial(f'(x))=6$

于是，设$f'(x)=a\,(x-3)^3\,(x+1)^3=a(x^6-3x^4+3x^2-1)$

那么　$f(x)=a(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x)+6$

又因$f(1)=-1,f(-1)=1$

从而得　$a=\frac{35}{16},b=0$

即　$f(x)=\frac{5}{16}x^7-\frac{21}{16}x^5+\frac{35}{16}x^3-\frac{35}{16}x$

# 参考文献

[1]北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组编,高等代数. 北京:人民教育出版社,2003

[2]许甫华,张贤科编著,高等代数解题方法. 清华大学出版社,2001

[3]方保镕,周继东,李医民编著,矩阵论. 清华大学出版社,2004

[4]黄廷祝,钟守铭,李正良编,矩阵理论. 高等教育出版社,2003

[5]王勇主编,高等代数辅导及习题全解. 科学技术文献出版社,2007

[6] A. Berman, R. J. Plemmons. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. SIAM, 1994. [7]C. Johnson. Row stochastic matrices similar to doubly stochastic matrices[J]. Linear and MultilinearAlgebra,1981,10,:113 – 130.

[8]G. W. Soules. Constructing symmetric nonnegative matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1983,13:241 –251.

[9] L. Mirsky, H. Perfect. Spectral properties of doubly stochastic matrices [J]. Monatsh. Math,1965,

69:35 –57.

[10]K. R. Suleimanova. Stochastic matrices with real eigenvalues[J]. Soviet Math. Dokl, 1949, 66:

343 –345 (inRussian).

[11]H. Perfect. Methods ofconstructing certain stochasticmatrices[J]. Duke Math. J,1953,20:
395 –404.

[12] F. L. Salzmann. A note on eigenvalues of nonnegative matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1972,5:

329 –338.

[13] R. B. Kellogg. Matrices similar to a positive or essentially positive matrix[J]. Linear Algebra Appl,1971,4:191 –204.

[14] M. Fiedler. Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices[J]. Linear Algebra App,1974, 9:

119 –142.

[15]M. Boyle, D. Handelman. The spectra of nonnegative matrices via symbolic dynamics[J] Ann. Math. 1991,133:249 –316.

[16] M. Boyle, D. Handelman. Algebraic shift equivalence and primitive matrices[J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1993,336 :121 – 150.

[17]R. Loewy, D. London. A note an inverse problem for nonnegative matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1978,6:83 –90.

[18]T. affey, E. Meehan. A refinement of an inequality of Johnson, Loewy, and London on nonnega – tive matrices and some applications[J]. Electron. J. Linear Algebra , 1998,3:119 – 128.

[19]R. Reams. An inequallity for nonnegative matrices and the inverse eigenvalue problem[J]. Linear and Multilinear Algebra , 1996,41: 367 –375.

[20]T. Laffey, E. Meehan. A characterization of trace zero nonnegative 5 ×5 matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1999,302 – 303 :295 – 302.

[General Information]
书名=矩阵的研究
作者=张红玉，魏慧敏编著
页数=140
SS号=12685566
DX号=
出版日期=2010.07
出版社=山西人民出版社